Chapitre 5 - Feuille d'exercices

Feuille d'exercices - Fiche 2/2
Quelques fonctions de référence

Exercice 1

Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = (x-2)^2 + 1$$

Soient a et b deux réels tels que $2 \leqslant a < b$.
Comparer les nombres $f(a)$ et $f(b)$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = -3(x+5)^2 - 9$$

Soient a et b deux réels tels que $a < b \leqslant -5$.
Comparer les nombres $f(a)$ et $f(b)$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie pour tout réel $x \in [-2; +\infty[$ par :

$$f(x) = -5\sqrt{2x+4} + 3$$

Soient a et b deux réels tels que $-2 \leqslant a < b$.
Comparer les nombres $f(a)$ et $f(b)$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{3}{(x+1)^2} - 3$$

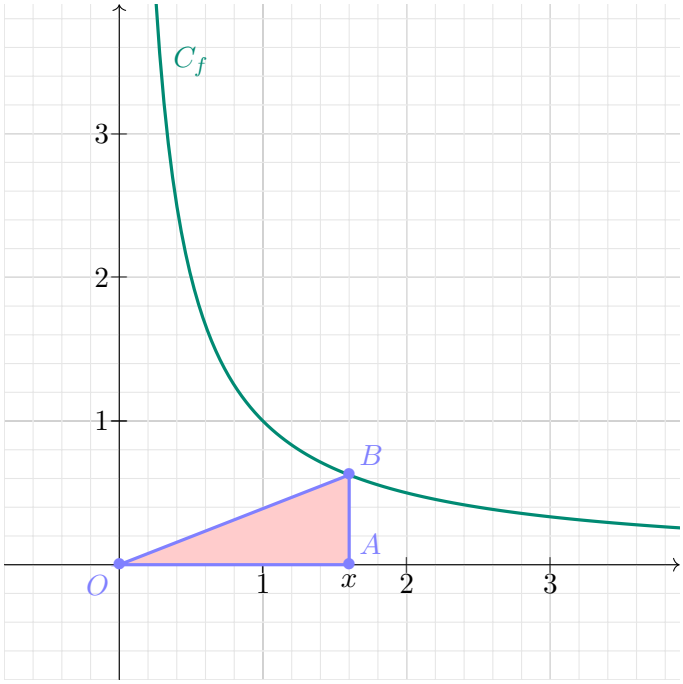
Montrer que pour tous réels a et b tels que $-1 < a < b$:

$$f(a) > f(b)$$

Exercice 5

Soient f la fonction inverse, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère ci-dessous.
Soit x un réel strictement positif. On définit les points :

- O est l'origine du repère ;
- A est le point de l'axe des abscisses, d'abscisse x ;
- B est le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x.



Montrer que, quelle que soit la valeur de $x \in \mathbb{R}_+^*$, le triangle OAB est d'aire constante.

Exercice 6

La hauteur d'un ballon est modélisée par la fonction h définie pour tout $t \in [0; +\infty[$ par :

$$h(t) = -\frac{1}{2}(t-5)^2 + \frac{25}{2}$$

où $h(t)$ désigne la hauteur du ballon, exprimée en mètres, t secondes après que le ballon a été frappé.

1. Soient a et b deux réels positifs.
   a. Montrer que si $a < b \leqslant 5$, alors $h(a) < h(b)$.
   b. Que peut-on en conclure sur l'évolution de la hauteur du ballon pendant les 5 premières secondes ?
2. Soient a et b deux réels positifs.
   a. Montrer que si $5 \leqslant a < b$, alors $h(a) > h(b)$. Que peut-on en déduire pour la fonction h ?
   b. Que peut-on en conclure sur l'évolution de la hauteur du ballon après les 5 premières secondes ?
3. Déterminer, à l'aide des questions précédentes, le temps t auquel le ballon est à sa hauteur maximale. Quelle est alors cette hauteur ?
4. a. Résoudre sur $[0; +\infty[$ l'inéquation
   $$h(t) \geqslant 0$$
   b. Que peut-on dire de cette modélisation ?

Exercice 7

Paulo rentre de vacances. Il fait très froid chez lui et décide de faire fonctionner son chauffage.
La température peut être modélisée par la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(t) = 23 - \frac{10}{t+1}$$

où $f(t)$ désigne la température (en °C) de la maison, t minutes après la mise en marche du radiateur.

1. Quelle température fait-il dans la maison au moment où Paulo allume le radiateur ?
2. Soient a et b deux réels positifs.
   a. Montrer que si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?
   b. Le résultat de la question précédente était-il prévisible, dans le contexte de l'exercice ?
3. Résoudre dans $\mathbb{R}_+$, l'inéquation :
$$f(t) \geqslant 22$$
4. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Pour les plus rapides uniquement (hors programme) :

5. Montrer que la température de la maison sera toujours inférieure à 23°C.
6. À l'aide de la calculatrice, identifier la température qu'a réglée Paulo sur le thermostat du radiateur.

Il est bon de savoir faire...

Exercice 8

Soient deux réels x et y tels que $0 < x \leqslant y$.
Comparer les nombres

$$\frac{1}{x^2 + 2\sqrt{x}} \text{ et } \frac{1}{y^2 + 2\sqrt{y}}.$$

Exercice 9

Pour chacune des courbes Γ_i suivantes, donner une expression de la fonction semblant être représentée.

