# Chapitre 5 - Feuille d'exercices

# Feuille d'exercices - Fiche 1/2
# Quelques fonctions de référence

## Exercice 1

Pour chacune des fonctions, compléter l'ensemble des informations demandées.

1. La fonction $f$ est la **fonction carré**.

   Ensemble de définition et expression :

   $D_f = \ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ $f(x) = \ldots\ldots\ldots$

   Tableau de valeurs :

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | | |

   Courbe représentative :

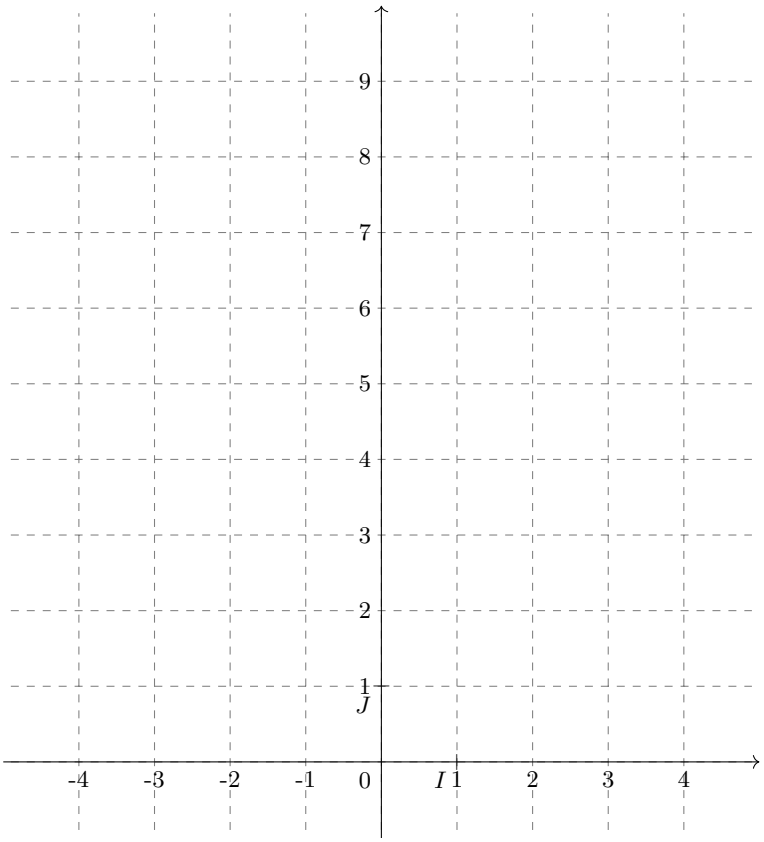


   Tableau de signe :

| $x$ | |
|---|---|
| Signe de $f(x)$ | |

   Comparaison d'images :

   - Si $0 \leqslant a < b$, alors $a^2 \ldots b^2$.
   - Si $a < b \leqslant 0$, alors $a^2 \ldots b^2$.

2. La fonction $f$ est la **fonction inverse**.

   Ensemble de définition et expression :

   $D_f = \ldots\ldots\ldots$ $f(x) = \ldots\ldots\ldots$

   Tableau de valeurs :

| $x$ | $-4$ | $-2$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | $0$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | | | | |

   Courbe représentative :

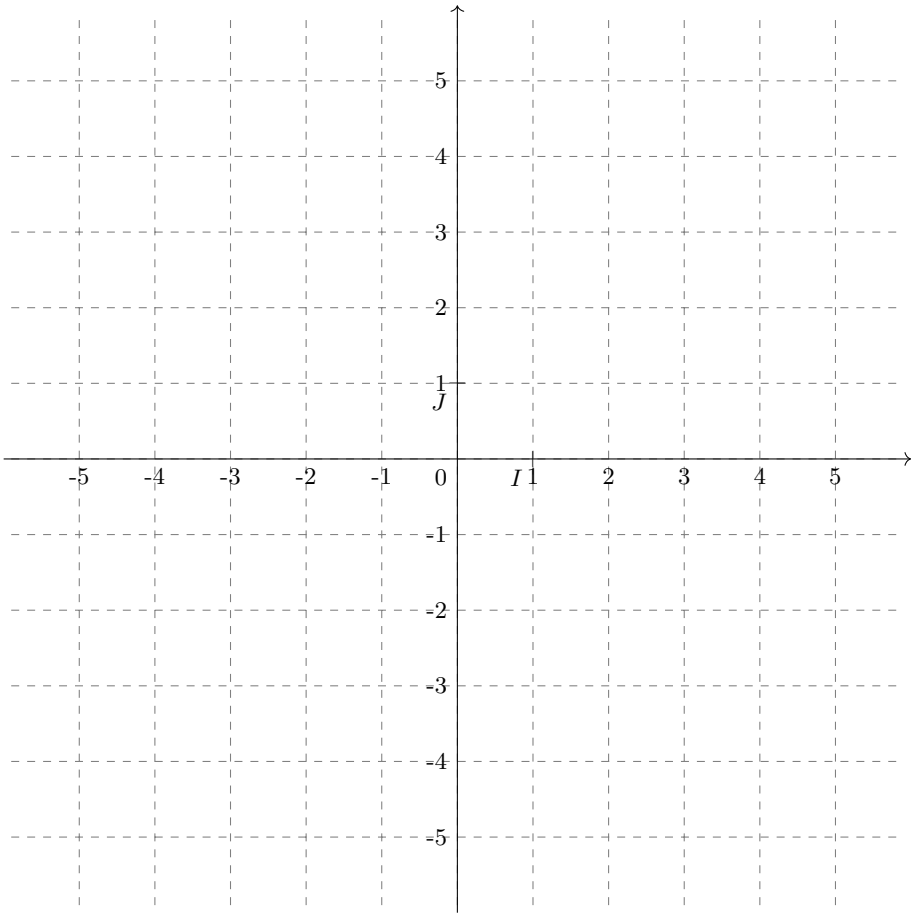


   Tableau de signe :

| $x$ | |
|---|---|
| Signe de $f(x)$ | |

   Comparaison d'images :

   - Si $0 < a < b$, alors $\frac{1}{a} \ldots \frac{1}{b}$.
   - Si $a < b < 0$, alors $\frac{1}{a} \ldots \frac{1}{b}$.

3. La fonction $f$ est la **fonction cube**.

   Ensemble de définition et expression :

   $D_f = \ldots\ldots\ldots$ $f(x) = \ldots\ldots\ldots$

   Tableau de valeurs :

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | |

   Courbe représentative :

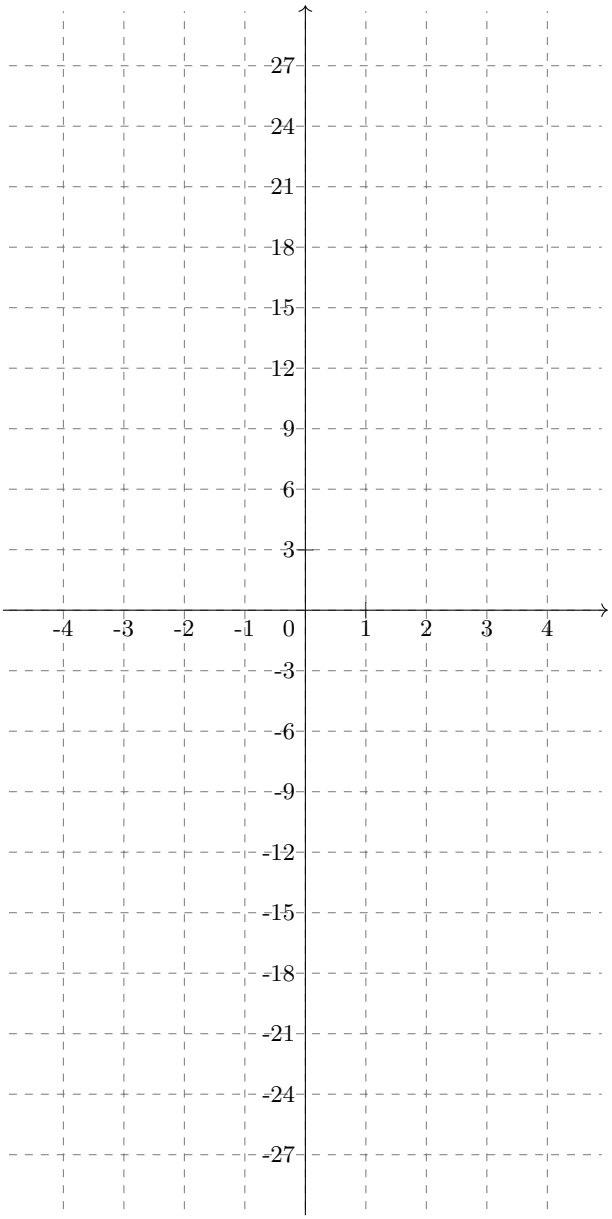


   Tableau de signe :

| $x$ | |
|---|---|
| Signe de $f(x)$ | |

   Comparaison d'images :

   - Si $a < b$, alors $a^3 \ldots b^3$.

4. La fonction $f$ est la **fonction racine carrée**.

   Ensemble de définition et expression :

   $D_f = \ldots\ldots\ldots$ $f(x) = \ldots\ldots\ldots$

   Tableau de valeurs :

| $x$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | |

   Courbe représentative :

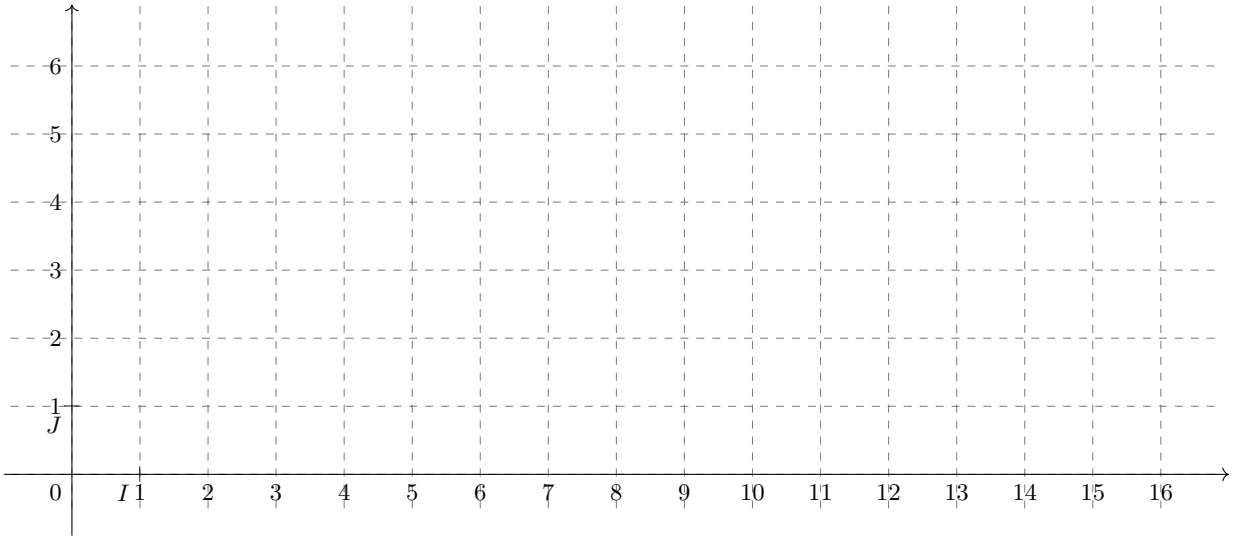


   Tableau de signe :

| $x$ | |
|---|---|
| Signe de $f(x)$ | |

   Comparaison d'images :

   - Si $0 \leqslant a < b$, alors $\sqrt{a} \ldots \sqrt{b}$.

5. La fonction $f$ est la **fonction valeur absolue.**

   Ensemble de définition et expression :

   $D_f = \ldots\ldots\ldots$ $f(x) = \ldots\ldots\ldots$

   Courbe représentative :

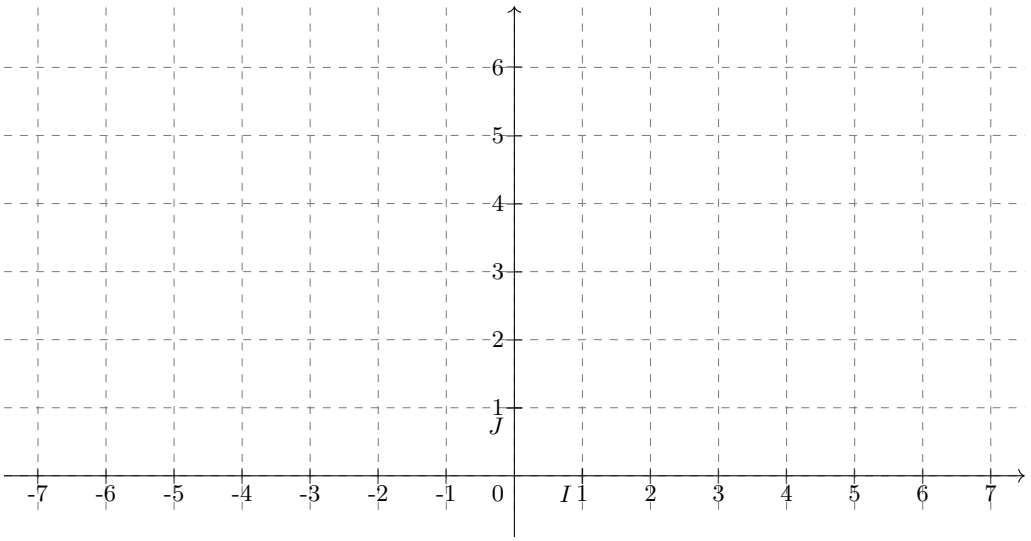

Tableau de signe :

| $x$ | |
|---|---|
| Signe de $f(x)$ | |

Comparaison d'images :

- Si $0 \leqslant a < b$, alors $|a| \dots |b|$.
- Si $a < b \leqslant 0$, alors $|a| \dots |b|$.

## Exercice 2

Compléter chacune des phrases mathématiques suivantes par $\leqslant$, $\geqslant$, $<$ ou $>$, et compléter la justification.
Exemple : $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ car $0 < 2 < 3$.

1. On peut écrire : $2{,}324^2 \dots 2{,}323^2$ car .....
2. On peut écrire : $(-3)^3 \dots 2^3$ car .....
3. On peut écrire : $(-3)^2 \dots (-5)^2$ car .....
4. On peut écrire : $\sqrt{9{,}12} \dots \sqrt{3{,}999}$ car .....
5. On peut écrire : $\frac{1}{26} \dots \frac{1}{27}$ car .....
6. On peut écrire : $-\frac{1}{8} \dots -\frac{1}{7}$ car .....
7. On peut écrire : $\left(\frac{1}{23}\right)^2 \dots \left(\frac{1}{75}\right)^2$ car .....
8. On peut écrire : $\sqrt{46} \dots 7$ car .....

## Exercice 3

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et donner un contrexemple dans le cas où elle est fausse. On pourra utiliser les courbes représentatives des différentes fonctions de référence pour répondre.

1. Si $x \in [3;5]$, alors $x^2 \in [9;25]$.
2. Si $x \in ]-4;-1]$, alors $x^2 \in ]1;16]$.
3. Si $-10 \leqslant x < -3$, alors $9 \leqslant x^2 \leqslant 100$.
4. Si $-5 < x < -2$, alors $25 < x^2 < 4$.
5. Si $-2 \leqslant x \leqslant 9$ alors $x^2 \in [4;81]$.
6. Si $x \in [-3;6[$, alors $x^2 \in [0;36[$.
7. Si $x \in [4;12]$, alors $\frac{1}{x} \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{12}\right[$.
8. Si $-5 < x \leqslant 8$, alors $x^3 \in [0;64]$.
9. Si $x \in [16;25]$, alors $\sqrt{x} \in [4;5]$.
10. Si $x^2 < y^2$, alors $x < y$.
11. Si $x^3 < y^3$, alors $x < y$.
12. Si $|x| < |y|$, alors $x < y$.

## Exercice 4

Dans chaque cas, recopier sur le cahier et compléter à l'aide d'un encadrement afin qu'il soit le plus fin possible. On justifiera à l'aide d'un graphique tracé à main levée.

1. Si $\frac{1}{2} \leqslant x < 4$ alors ..... (encadrement de $x^2$ attendu)
2. Si $-6 < x < -3$ alors ..... (encadrement de $x^2$ attendu)
3. Si $-2{,}5 < x \leqslant 10$ alors ..... (encadrement de $x^2$ attendu)
4. Si $2 < x \leqslant 8$ alors ..... (encadrement de $\frac{1}{x}$ attendu)
5. Si $-4 \leqslant x \leqslant -1$ alors ..... (encadrement de $\frac{1}{x}$ attendu)
6. Si $8 > x \geqslant -1$ alors ..... (encadrement de $x^3$ attendu)
7. Si $8 > x \geqslant -1$ alors ..... (encadrement de $x^2$ attendu)
8. Si $x < -4$ alors ..... (encadrement de $x^2$ attendu)
9. Si $|x| < 3$, alors ..... (encadrement de $x$ attendu)
10. Si $-6 \leqslant x < 4$ alors ..... (encadrement de $|x|$ attendu)

## Exercice 5

Dans chaque cas, recopier sur le cahier et compléter à l'aide d'un intervalle afin qu'il soit le plus fin possible. On justifiera à l'aide d'un graphique tracé à main levée.

1. Si $x \in [2\,;9]$ alors $\sqrt{x} \in$ .....
2. Si $x \in ]-5\,;10]$ alors $x^3 \in$ .....
3. Si $x \in ]-6\,;2]$ alors $x^2 \in$ .....
4. Si $x > 81$ alors $\sqrt{x} \in$ .....
5. Si $x > -2$ alors $x^2 \in$ .....

## Exercice 6

Démontrer les propriétés du cours :

1. Soient $a$ et $b$ deux réels et $f$ la fonction carré.
   - Si $0 \leqslant a < b$, alors $f(a) < f(b)$.
     Autrement dit : Si $0 \leqslant a < b$, alors $a^2 < b^2$.
   - Si $a < b \leqslant 0$, alors $f(a) > f(b)$.
     Autrement dit : Si $a < b \leqslant 0$, alors $a^2 > b^2$.
2. Soient $a$ et $b$ deux réels non nuls et $f$ la fonction inverse.
   - Si $0 < a < b$, alors $f(a) > f(b)$.
     Autrement dit : Si $0 < a < b$, alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

- Si $a < b < 0$, alors $f(a) > f(b)$.
  Autrement dit : Si $a < b < 0$, alors $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.

3. Soient $a$ et $b$ deux réels et $f$ la fonction cube.
   Si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$.
   Autrement dit : Si $a < b$, alors $a^3 < b^3$.

4. Soient $a$ et $b$ deux réels positifs et $f$ la fonction racine carrée.
   Si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$.
   Autrement dit : Si $a < b$, alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

5. Soient $a$ et $b$ deux réels et $f$ la fonction valeur absolue.
   - Si $0 \leqslant a < b$, alors $f(a) < f(b)$.
     Autrement dit : Si $0 \leqslant a < b$, alors $|a| < |b|$.
   - Si $a < b \leqslant 0$, alors $f(a) > f(b)$.
     Autrement dit : Si $a < b \leqslant 0$, alors $|a| > |b|$.

## Exercice 7

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$(I_1) : \quad x^3 > 343 \qquad (I_2) : \quad x^3 \leqslant -27 \qquad (I_3) : \quad x^3 > -\frac{8}{27}$$

2. Résoudre dans $[-5; 3]$ les inéquations suivantes :

$$(I_4) : \quad x^3 > 343 \qquad (I_5) : \quad x^3 \leqslant -27 \qquad (I_6) : \quad x^3 > -\frac{8}{27}$$

3. Résoudre dans $[-2; +\infty[$ les inéquations suivantes :

$$(I_7) : \quad 2x^3 > 686 \qquad (I_8) : \quad -4x^3 \geqslant 64 \qquad (I_9) : \quad 3x^3 < \frac{12}{5}$$

## Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ les inéquations suivantes :

$$(I_1) : \quad \frac{1}{x} \leqslant 3 \qquad (I_2) : \quad \frac{1}{x} > \frac{1}{4} \qquad (I_3) : \quad \frac{1}{x} < -5$$
$$(I_4) : \quad -\frac{1}{x} \geqslant -2 \qquad (I_5) : \quad \frac{3}{x} > 4 \qquad (I_6) : \quad \frac{5}{x} \geqslant 0$$

## Exercice 9

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$(I_1) : \quad x^2 \leqslant 4 \qquad (I_2) : \quad x^2 > 25 \qquad (I_3) : \quad x^2 < 7$$

2. Résoudre dans $[-4\,;+\infty[$ les inéquations suivantes :

$$(I_4) : \quad x^2 \geqslant 9 \qquad (I_5) : \quad 3x^2 < 27 \qquad (I_6) : \quad 16x^2 > 1$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$(I_7) : \quad 3x^2 + 5 \leqslant 9 \qquad (I_8) : \quad 5x^2 - 4 > 1 - 2x^2 \qquad (I_9) : \quad 22x^2 > 4 + 2x^2$$

## Exercice 10

Résoudre dans $[2;+\infty[$ les inéquations suivantes :

$$(I_1) : \quad |x| > 4 \qquad (I_2) : \quad |x| > -3 \qquad (I_3) : \quad |x| \leqslant 5$$