Contrôle **Durée : 55 min**

Calcul littéral

Calculatrice non autorisée.

Exercice 1 ..... 4 points

1. Écrire sous forme d'un entier ou d'une fraction irréductible :

$$A = 2^3 \times 3^2 \qquad \text{et} \qquad B = \frac{5^7}{5^2 \times 5^3}$$

2. Soit a un nombre réel non nul. Écrire le nombre suivant sous la forme d'une seule puissance de a :

$$C = \frac{(a^7)^3}{(a^{-2})^{-6}}$$

3. Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

$$N = 0{,}000\,002\,64 \qquad \text{et} \qquad M = 450 \times 10^6$$

Solution

1. $A = 2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72.$

   $B = \dfrac{5^7}{5^2 \times 5^3} = \dfrac{5^7}{5^{2+3}} = \dfrac{5^7}{5^5} = 5^{7-5} = 5^2 = 25.$

2. $C = \dfrac{(a^7)^3}{(a^{-2})^{-6}} = \dfrac{a^{7\times 3}}{a^{-2\times(-6)}} = \dfrac{a^{21}}{a^{12}} = a^{21-12} = a^9.$

3. $N = 0{,}000\,002\,64 = 2{,}64 \times 10^{-6}.$

   $M = 450 \times 10^6 = 4{,}5 \times 10^2 \times 10^6 = 4{,}5 \times 10^8.$

Exercice 2 ..... 4 points

Calculer et donner le résultat sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible :

1. $D = \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{3} \times \dfrac{2}{5}$

2. $E = \dfrac{1 + \dfrac{1}{7}}{1 + \dfrac{1}{3}}$

3. $F = \dfrac{4}{\dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{6}}$

Solution

1. $D = \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{3} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{8}{15} = \dfrac{10}{15} - \dfrac{8}{15} = \dfrac{2}{15}.$

2. $E = \dfrac{1+\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{7}{7}+\frac{1}{7}}{\frac{3}{3}+\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{8}{7}}{\frac{4}{3}} = \dfrac{8}{7} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{2 \times 4 \times 3}{7 \times 4} = \dfrac{6}{7}.$

3. $F = \dfrac{4}{\frac{2}{3}-\frac{5}{6}} = \dfrac{4}{\frac{4}{6}-\frac{5}{6}} = \dfrac{4}{-\frac{1}{6}} = 4 \times \left(-\dfrac{6}{1}\right) = -24.$

Exercice 3 ..... 4 points

1. Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers avec b le plus petit possible :

$$G = \sqrt{98} \qquad \text{et} \qquad H = \sqrt{45}$$

2. Calculer et simplifier au maximum :

$$I = (3\sqrt{2})^2$$

3. Écrire le nombre J suivant sans racine carrée au dénominateur :

$$J = \frac{2}{1+\sqrt{2}}$$

Solution

1. $G = \sqrt{98} = \sqrt{49 \times 2} = \sqrt{49} \times \sqrt{2} = 7\sqrt{2}.$
   $H = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}.$
2. $I = (3\sqrt{2})^2 = 3^2 \times (\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18.$
3. En multipliant par la quantité conjuguée $1-\sqrt{2}$:

$$J = \frac{2}{1+\sqrt{2}} = \frac{2(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{2-2\sqrt{2}}{1^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{2-2\sqrt{2}}{1-2} = \frac{2-2\sqrt{2}}{-1} = 2\sqrt{2}-2$$

Exercice 4 ..... 4 points

Développer, réduire et simplifier au maximum chacune des expressions suivantes.
ATTENTION, pour $K(x)$ et $L(x)$, toute réponse n'utilisant pas une identité remarquable comme vue en classe ne sera pas comptabilisée.

1. $K(x) = (4x-7)^2$
2. $L(x) = (2x-\sqrt{3})(2x+\sqrt{3})$
3. $M(x) = 3(x-5) - 4(2x-2)(5-x)$

Solution

1. $K(x) = (4x-7)^2 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 7 + 7^2 = 16x^2 - 56x + 49.$
2. $L(x) = (2x-\sqrt{3})(2x+\sqrt{3}) = (2x)^2 - (\sqrt{3})^2 = 4x^2 - 3.$

3.

$$\begin{aligned} M(x) &= 3(x-5) - 4(2x-2)(5-x) \\ &= 3x - 15 - 4(10x - 2x^2 - 10 + 2x) \\ &= 3x - 15 - 4(-2x^2 + 12x - 10) \\ &= 3x - 15 + 8x^2 - 48x + 40 \\ &= 8x^2 - 45x + 25 \end{aligned}$$

Exercice 5 ..... 4 points

1. Factoriser au maximum les expressions suivantes :
   a. $N(x) = 9x^2 - 12x + 4$
   b. $P(x) = x^2 - 9$
   c. $Q(x) = (2x-1)^2 - (3x+2)^2$
2. Pour $x \neq 2$ et $x \neq 0$, réduire au même dénominateur et simplifier au maximum :

$$R(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{3}{x}$$

Solution

1. a. $N(x) = 9x^2 - 12x + 4 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 2 + 2^2 = (3x-2)^2$.
   b. $P(x) = x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x-3)(x+3)$.
   c. D'après la propriété $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ avec $a = 2x-1$ et $b = 3x+2$:

$$\begin{aligned} Q(x) &= (2x-1)^2 - (3x+2)^2 \\ &= [(2x-1) - (3x+2)]\,[(2x-1) + (3x+2)] \\ &= (2x - 1 - 3x - 2)(2x - 1 + 3x + 2) \\ &= (-x-3)(5x+1) \quad \text{ou} \quad -(x+3)(5x+1) \end{aligned}$$

2. Pour $x \neq 2$ et $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{1}{x-2} - \frac{3}{x} \\ &= \frac{1 \times x}{(x-2) \times x} - \frac{3 \times (x-2)}{x \times (x-2)} \\ &= \frac{x - 3(x-2)}{x(x-2)} \\ &= \frac{x - 3x + 6}{x(x-2)} \\ &= \frac{-2x + 6}{x(x-2)} \end{aligned}$$