Interrogation **Durée : 30 mn**

Intervalles et valeur absolue

Calculatrice non autorisée

Exercice 1 ..... 4 points

Compléter les pointillés par le symbole adapté parmi : $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$.

a. $3,15 \ldots\ldots]-\infty\ ;\ \pi[$

b. $[-2\ ;\ 5] \ldots\ldots \{-3\ ;\ 10\}$

c. $[0\ ;\ 5] \ldots\ldots \mathbb{R}_+$

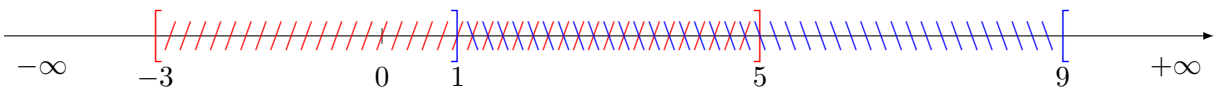
d. $\sqrt{10} \ldots\ldots]3\ ;\ 4[$

Solution

1. $3,15 \notin]-\infty\ ;\ \pi[$ car $3,15 > \pi \approx 3,14159$.
2. $[-2\ ;\ 5] \not\subset \{-3\ ;\ 10\}$ car l'intervalle $[-2\ ;\ 5]$ contient une infinité de nombres (par exemple 0) qui n'appartiennent pas à l'ensemble $\{-3\ ;\ 10\}$ qui ne contient que les nombres -3 et 10.
3. $[0\ ;\ 5] \subset \mathbb{R}_+$ car tous les nombres de $[0\ ;\ 5]$ sont des nombres réels positifs ou nuls.
4. $\sqrt{10} \in]3\ ;\ 4[$ car $\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$ donc $3 < \sqrt{10} < 4$.

Exercice 2 ..... 5 points

On a tracé ci-dessous la droite des réels contenant deux intervalles I (hachuré en rouge) et J (hachuré en bleu) :



1. Donner la notation sous forme d'intervalle de I et de J.
2. Déterminer le centre c et le rayon r de l'intervalle I.
3. Déterminer, sous forme d'intervalles, $I \cap J$ et $I \cup J$.
4. Soit $K = [12\,;b]$ un intervalle avec b un nombre réel.
   Déterminer la valeur de b pour que K soit de centre 16. Quel est alors le rayon de l'intervalle ?

Solution

1. $I = [-3\ ;\ 5]$ (rouge) et $J =]1\ ;\ 9[$ (bleu).
2. Pour l'intervalle $I = [-3\ ;\ 5]$:
   - Centre : $c = \dfrac{-3+5}{2} = 1$
   - Rayon : $r = 5 - 1 = 4$
3. $I \cap J =]1\ ;\ 5]$ et $I \cup J = [-3\ ;\ 9[$.
4. Le centre de $K = [12\ ;\ b]$ est $c = \dfrac{12+b}{2}$

Donc

$$c = 16 \iff \frac{12+b}{2} = 16 \iff 12+b = 32 \iff b = 20$$

Donc $b = 20$.

Le rayon de $K = [12\ ;\ 20]$ est alors $r = 16 - 12 = 4$.

Exercice 3 ..... 3 points

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante et donner l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle :

$$\frac{1}{3} + 2x \leqslant 4x - \frac{5}{3}$$

Solution

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} + 2x \leqslant 4x - \frac{5}{3} &\iff 2x - 4x \leqslant -\frac{5}{3} - \frac{1}{3} \\
&\iff -2x \leqslant -\frac{6}{3} \\
&\iff -2x \leqslant -2 \\
&\iff x \geqslant 1 \quad \text{(on divise par } -2 < 0\text{)}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $S = [1\ ;\ +\infty[$.

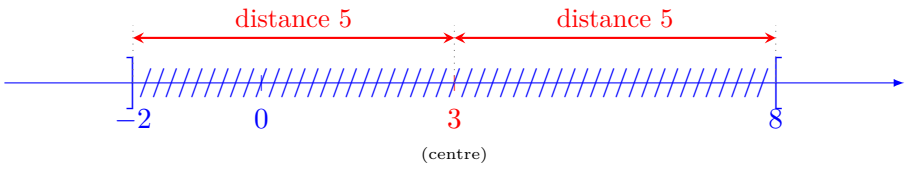
Exercice 4 ..... 4 points

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes en interprétant géométriquement la valeur absolue comme une distance. On représentera l'ensemble des solutions sur la droite des réels.

1. $|x-3| < 5$
2. $|x+1| \geqslant 3$

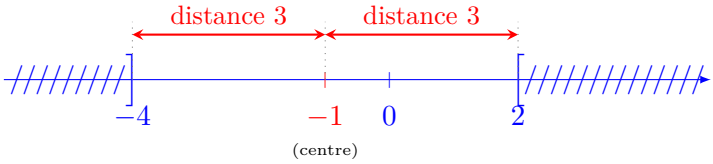
Solution

1. $|x-3| < 5$ signifie que la distance entre x et 3 est strictement inférieure à 5.



On a donc $3 - 5 < x < 3 + 5 \iff -2 < x < 8$, soit $S_1 =]-2\ ;\ 8[$.

2. $|x+1| \geqslant 3 \iff |x-(-1)| \geqslant 3$ signifie que la distance entre x et -1 est supérieure ou égale à 3.



On a donc $x \leqslant -1-3$ ou $x \geqslant -1+3 \iff x \leqslant -4$ ou $x \geqslant 2$.
D'où $S_2 =]-\infty\ ;\ -4] \cup [2\ ;\ +\infty[$.

Exercice 5 ..... 4 points

On considère l'affirmation suivante :

« Si $x \in [2\ ;\ 5]$, alors $x \in [0\ ;\ 8]$ »

1. Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
2. Énoncer la réciproque de cette affirmation.
3. La réciproque est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

Solution

1. **Vrai.** L'intervalle $[2\ ;\ 5]$ est inclus dans $[0\ ;\ 8]$ ($[2\ ;\ 5] \subset [0\ ;\ 8]$). Tout réel appartenant à $[2\ ;\ 5]$ appartient donc nécessairement à $[0\ ;\ 8]$.
2. Réciproque : « Si $x \in [0\ ;\ 8]$, alors $x \in [2\ ;\ 5]$ ».
3. **Faux.** Contre-exemple : pour $x = 0$, on a bien $0 \in [0\ ;\ 8]$, mais $0 \notin [2\ ;\ 5]$.