Contrôle **Durée : 55 min**

Calcul littéral

Calculatrice non autorisée.

Exercice 1

1. Écrire chacun des nombres suivants sous la forme d'une seule puissance :

$$A = \frac{5^8 \times 5^{-3}}{(5^2)^4} \qquad B = \frac{(-3)^4 \times 3^{-2}}{3^5}$$

2. Donner l'écriture scientifique du nombre suivant :

$$C = \frac{360 \times 10^{-5} \times 10^8}{0{,}12 \times 10^2}$$

Solution

1.

$$\begin{aligned} A &= \frac{5^8 \times 5^{-3}}{(5^2)^4} \\ &= \frac{5^{8+(-3)}}{5^{2\times 4}} \\ &= \frac{5^5}{5^8} \\ &= 5^{5-8} \\ A &= 5^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{(-3)^4 \times 3^{-2}}{3^5} \\ &= \frac{3^4 \times 3^{-2}}{3^5} \\ &= \frac{3^{4+(-2)}}{3^5} \\ &= \frac{3^2}{3^5} \\ &= 3^{2-5} \\ B &= 3^{-3} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} C &= \frac{360 \times 10^{-5} \times 10^8}{0{,}12 \times 10^2} \\ &= \frac{360}{0{,}12} \times \frac{10^3}{10^2} \\ &= 3000 \times 10^1 \\ &= 3 \times 10^3 \times 10^1 \\ C &= 3 \times 10^4 \end{aligned}$$

Exercice 2

1. Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible :

$$A = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{7}{4} \qquad B = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}{\frac{5}{6} - \frac{1}{3}}$$

2. Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers avec b le plus petit possible :

$$C = \sqrt{48} - 3\sqrt{12} + 2\sqrt{75}$$

Solution

1.
$$\begin{aligned} A &= \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{7}{4} \\ &= \frac{5}{3} - \frac{14}{12} \\ &= \frac{20}{12} - \frac{14}{12} \\ &= \frac{6}{12} \\ A &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}{\frac{5}{6} - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{\frac{3}{4} + \frac{2}{4}}{\frac{5}{6} - \frac{2}{6}} \\ &= \frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{6}} \\ &= \frac{5}{4} \times \frac{6}{3} \\ B &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} C &= \sqrt{48} - 3\sqrt{12} + 2\sqrt{75} \\ &= \sqrt{16 \times 3} - 3\sqrt{4 \times 3} + 2\sqrt{25 \times 3} \\ &= 4\sqrt{3} - 3 \times 2\sqrt{3} + 2 \times 5\sqrt{3} \\ &= 4\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 10\sqrt{3} \\ C &= 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

Exercice 3

1. Développer et réduire les expressions suivantes :

$$A(x) = (4x-3)^2 \qquad B(x) = (3x+5)(3x-5) - (2x-1)^2$$

2. Factoriser les expressions suivantes :

$$C(x) = 36x^2 - 49 \qquad D(x) = (2x+5)^2 - 16$$

3. Écrire le nombre suivant sans racine carrée au dénominateur :

$$E = \frac{6}{\sqrt{3}-1}$$

Solution

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} A(x) &= (4x-3)^2 \\ &= (4x)^2 - 2 \times 4x \times 3 + 3^2 \\ A(x) &= 16x^2 - 24x + 9 \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} B(x) &= (3x+5)(3x-5) - (2x-1)^2 \\ &= \left((3x)^2 - 5^2\right) - \left((2x)^2 - 2 \times 2x \times 1 + 1^2\right) \\ &= (9x^2 - 25) - (4x^2 - 4x + 1) \\ &= 9x^2 - 25 - 4x^2 + 4x - 1 \\ B(x) &= 5x^2 + 4x - 26 \end{aligned}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$C(x) = 36x^2 - 49 = (6x)^2 - 7^2 = (6x-7)(6x+7)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} D(x) &= (2x+5)^2 - 16 \\ &= (2x+5)^2 - 4^2 \\ &= \big((2x+5)-4\big)\big((2x+5)+4\big) \\ D(x) &= (2x+1)(2x+9) \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} E &= \frac{6}{\sqrt{3}-1} \\ &= \frac{6(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} \\ &= \frac{6(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} \\ &= \frac{6(\sqrt{3}+1)}{3-1} \\ &= \frac{6(\sqrt{3}+1)}{2} \\ E &= 3\sqrt{3}+3 \quad (\text{ou } 3(\sqrt{3}+1)) \end{aligned}$$

Exercice 4

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :
$$-4x + 9 \leqslant 21$$

2. Soient x et y deux réels tels que $2 \leqslant x \leqslant 6$ et $-5 \leqslant y \leqslant -2$.
Déterminer un encadrement de $x+y$, puis un encadrement de $x-y$.

Solution

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} -4x + 9 \leqslant 21 &\iff -4x \leqslant 21 - 9 \\ &\iff -4x \leqslant 12 \\ &\iff x \geqslant \frac{12}{-4} \quad (\text{car } -4 < 0, \text{ on inverse le sens}) \\ &\iff x \geqslant -3 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = [-3\,;\,+\infty[$.

2. • On a $2 \leqslant x \leqslant 6$ et $-5 \leqslant y \leqslant -2$.
Par somme d'inégalités de même sens :
$$2 + (-5) \leqslant x + y \leqslant 6 + (-2)$$
D'où :
$$-3 \leqslant x + y \leqslant 4$$

- On sait que $-5 \leqslant y \leqslant -2$, donc en multipliant par -1 (en inversant le sens) :

$$2 \leqslant -y \leqslant 5$$

Puis par somme d'inégalités de même sens avec $2 \leqslant x \leqslant 6$:

$$2+2 \leqslant x+(-y) \leqslant 6+5$$

D'où :

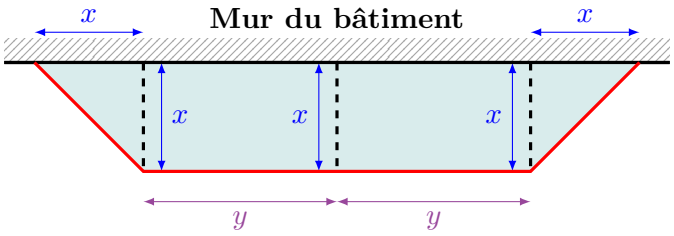
$$4 \leqslant x-y \leqslant 11$$

Exercice 5

Un éleveur souhaite construire un enclos adossé au mur d'un bâtiment (représenté par la zone hachurée sur le schéma). L'enclos est composé de deux zones rectangulaires centrales et de deux extensions triangulaires aux extrémités.

Toutes les mesures sont exprimées en mètres. L'éleveur sait que :

- Les deux extensions triangulaires sont des triangles rectangles isocèles dont les deux côtés de l'angle droit mesurent x ;
- Les deux zones rectangulaires centrales ont pour dimensions x et y ;
- La longueur x est comprise entre 3 et 5 mètres ;
- La longueur y est comprise entre 6 et 10 mètres.



1. Montrer que la longueur de l'hypoténuse de chaque triangle rectangle est égale à $x\sqrt{2}$.
2. L'éleveur installe du grillage sur tout le contour extérieur de l'enclos, représenté en rouge sur le schéma. Exprimer la longueur totale $\mathcal{L}$ de grillage nécessaire en fonction de x et y.
3. Déterminer un encadrement rigoureux de la longueur de grillage $\mathcal{L}$ nécessaire.

Solution

1. Considérons l'un des triangles rectangles isocèles dont les deux côtés de l'angle droit mesurent x.

   D'après le théorème de Pythagore, le carré de la longueur h de l'hypoténuse est :

$$h^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$$

   Comme $h > 0$ et $x > 0$, on en déduit que :

$$h = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$$

   La longueur de l'hypoténuse est donc bien égale à $x\sqrt{2}$.

2. Le contour extérieur rouge est composé de :
   - Deux hypoténuses de longueur $x\sqrt{2}$;

- Deux côtés horizontaux de longueur y.

La longueur totale $\mathcal{L}$ de grillage s'exprime donc par :

$$\mathcal{L} = 2y + 2x\sqrt{2}$$

3. - On sait que $6 \leqslant y \leqslant 10$, donc :

$$12 \leqslant 2y \leqslant 20$$

- On sait que $3 \leqslant x \leqslant 5$, donc en multipliant par $2\sqrt{2} > 0$:

$$6\sqrt{2} \leqslant 2x\sqrt{2} \leqslant 10\sqrt{2}$$

Par somme d'inégalités de même sens :

$$12 + 6\sqrt{2} \leqslant 2y + 2x\sqrt{2} \leqslant 20 + 10\sqrt{2}$$

D'où l'encadrement rigoureux :

$$12 + 6\sqrt{2} \leqslant \mathcal{L} \leqslant 20 + 10\sqrt{2}$$