Fiche d'exercices n° 15

Exercice 1 Soient m, n, p trois entiers naturels. En observant le coefficient devant X^p du polynôme $(1+X)^m(1+X)^n$, déterminer une expression simple de la somme
$$\sum_{k=0}^{p}\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}.$$
Et pour la somme $\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{m}{k}\binom{m}{p-k}$?

Exercice 2 Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

1. Donner les racines complexes puis réelles du polynôme $P = X^n - 1$.
2. En déduire les racines (complexes et réelles) du polynôme $Q = 1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-1}$.

Exercice 3 Factoriser les polynômes $P = X^2 + X + 1$ et $Q = X^2 + X^3 + X^4 + X^5$ en produit de facteurs irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ et de $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 4 Déterminer les éléments de $\mathbf{C}[X]$ tels que $P(0) = P'(1) = 1$ et $P(1) = P'(0) = 0$.

Exercice 5 Effectuer la division euclidienne de

(1) $A = X^4 + 2X^3 - X + 6$ par $B = X^3 - 6X^2 + X + 4$ (dans $\mathbf{R}[X]$)

(2) $A = \mathrm{i}X^3 - X^2 + 1 - \mathrm{i}$ par $B = (1+\mathrm{i})X^2 - \mathrm{i}X + 3$ (dans $\mathbf{C}[X]$).

Exercice 6 Soit $(\theta, n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de

(1) $(\sin(\theta)X + \cos(\theta))^n$ par $X^2 + 1$

(2) $(\mathrm{sh}(\theta)X + \mathrm{ch}(\theta))^n$ par $X^2 - 1$.

Exercice 7 Soit un entier $n \geq 2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de

(1) X^n par $X^3 - 3X^2 + 3X - 1$

(2) $X^n + X^{n-1} + X + 1$ par $(X-1)^2$

(3) $(X-1)^n + (X+2)^n + 2$ par $(X-1)^n$.

Exercice 8 Soit $(m, n, p, q) \in \mathbf{N}^4$. Montrer que B divise A dans les deux cas suivants

(1) $A = (X+1)^n - nX - 1$ et $B = X^2$

(2) $A = X^{4m+3} + X^{4n+2} + X^{4p+1} + X^{4q}$ et $B = X^3 + X^2 + X + 1$.

Exercice 9 Déterminer l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels $X^2 + X + 1$ divise $(X+1)^n - X^n - 1$.

Exercice 10 On considère le polynôme $P = X^5 + X + 1$.

1. Montrer que P possède une unique racine réelle. Est-ce une racine simple ?
2. Montrer que P possède deux racines dont le produit vaut 1.

Exercice 11 Soit un entier $n \geq 3$.

1. Vérifier que 1 est racine du polynôme $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$ puis déterminer son ordre de multiplicité.
2. Vérifier que 2 est racine du polynôme $P = X^6 - 7X^5 + 17X^4 - 16X^3 + 8X^2 - 16X + 16$ puis déterminer son ordre de multiplicité.

Exercice 12 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{K}[X]$ tels que : $\forall n \in \mathbf{N},\ P(n) = n^{2025} + 2025n^{17} + 2n + 3$.

Exercice 13 Décomposer en produit de facteurs irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ et de $\mathbf{R}[X]$ les polynômes suivants :

(1) $X^2 - 5X + 4$

(2) $X^4 - 5X^2 + 4$

(3) $X^3 - 1$

(4) $X^3 + 1$

(5) $X^4 + 1$

(6) $X^4 + \mathrm{i}$

(7) $X^4 + X^2 + 1$

(8) $X^4 + 2X^2 + 1$

(9) $X^3 - 5X^2 + 3X + 9$.

Exercice 14 Soit $P = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

1. Factoriser P en produit de facteurs irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ puis de $\mathbf{R}[X]$.
2. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 15 Soient $a \in \mathbf{K}$ un polynôme P à coefficients dans $\mathbf{K}$ tel que $P(X+a) = P(X)$.
Nous allons montrer que P est un polynôme constant de deux manières.

1. a. Montrer que pour tout $Q \in \mathbf{K}[X] \setminus \{0_{\mathbf{K}[X]}\}$, on a $\deg(Q(X+a) - Q(X)) < \deg(Q)$.
   b. En déduire que P est constant.
2. a. Justifier que la suite $(P(an))_{n\in\mathbf{N}}$ est constante.
   b. Qu'en déduire concernant le polynôme $Q = P - P(0)$? Conclure.

Exercice 16 Déterminer tous les polynômes P et Q à coefficients réels tels que : $\forall x \in \mathbf{R},\ P(x)\cos(x)+Q(x)\sin(x)=0$.

Exercice 17 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ tels que $P(0)=0$ et : $\forall x \in \mathbf{R}$, $P(x^2+1)=(P(x))^2+1$.

Exercice 18 Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On suppose que P est un polynôme de degré au plus $2n-1$ tel que : $\forall k \in [\![0,2n-1]\!]$, $P(k)=\frac{k}{k+1}$.

1. Montrer que $P(2n)=1$.
2. Existe-t-il un tel polynôme P ? Est-il unique ?

Exercice 19 Soit $n \in \mathbf{N}$. On considère le polynôme

$$P_n=\sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p}{p!}\underbrace{\prod_{k=0}^{p-1}(X-k)}_{X(X-1)\cdots(X-p+1)} \qquad \textit{(lorsque } p=0\textit{, on convient que } \prod_{k=0}^{p-1}(X-k)=1\textit{).}$$

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n.
2. Calculer $P_n(k)$ pour $k \in [\![1,n]\!]$. En déduire une factorisation de P_n.
3. Retrouver le résultat par récurrence.

Exercice 20 Décomposer sur $\mathbf{C}[X]$ le polynôme $P=(X+1)^5-(X-1)^5$. En déduire une expression simple de

$$A=\left(1-\operatorname{cotan}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\times\left(1-\operatorname{cotan}^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right),\ B=\left(1+\operatorname{cotan}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\times\left(1+\operatorname{cotan}^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right),\ C=\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{5}\right)\operatorname{cotan}\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

Exercice 21 Soit $n \in \mathbf{N}$. Décomposer sur $\mathbf{C}[X]$ le polynôme $P=(X+\mathrm{i})^{2n+1}-(X-\mathrm{i})^{2n+1}$. En déduire une expression simple de

$$\prod_{k=1}^{n}\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{n}\left(4+\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right).$$

Exercice 22 Soit $n \in \mathbf{N}$. Décomposer sur $\mathbf{C}[X]$ le polynôme $P=1+X+X^2+\cdots+X^n$ et en déduire une expression simple du produit $\prod_{k=1}^{n}\sin(\frac{k\pi}{n+1})$.

Exercice 23 Soit $n \in \mathbf{N}$. Déterminer tous les polynômes P vérifiant :

(1) $(1-X)P'-P=X^n$ (2) $P+(1-X)P'=0$ (3) $(1+X^2)P''-(2X+1)P'+2P=0$.

Exercice 24 Déterminer les éléments de $\mathbf{C}[X]$ multiples de leur propre polynôme dérivé.

Exercice 25 Soient trois réels deux à deux distincts a,b,c et le polynôme $P=(X-a)(X-b)(X-c)$.
Montrer que le discriminant du polynôme P' est strictement positif.

Exercice 26 Soit $P \in \mathbf{R}[X]$.

1. On suppose P scindé à racines simples. Montrer à l'aide du théorème de Rolle que P' est également scindé à racines simples.
2. a. Montrer que si $x_0 \in \mathbf{R}$ est une racine d'ordre de multiplicité $k \geq 1$ de P, alors $x_0 \in \mathbf{R}$ est une racine d'ordre de multiplicité $k-1$ de P'.
   b. En déduire que si P est scindé, alors P' est scindé.

Exercice 27 On note

$$\mathscr{C}=\left\{A \in \mathbf{R}[X] \mid \exists (S,T) \in (\mathbf{R}[X])^2, A=S^2+T^2\right\}.$$

1. Montrer que si A et B sont deux éléments de $\mathscr{C}$, alors $A \times B$ est un élément de $\mathscr{C}$.
2. Montrer que si $a \in \mathbf{R}$ et si $n \in 2\mathbf{N}$, alors $(X-a)^n \in \mathscr{C}$.
3. Montrer que tout polynôme irréductible de degré 2 de $\mathbf{R}[X]$ avec coefficient dominant strictement positif est un élément de $\mathscr{C}$.
4. Montrer que tout polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ positif sur $\mathbf{R}$ est un élément de $\mathscr{C}$.
5. En déduire que la classe $\mathscr{C}$ est stable par somme (*i.e.* si $(A,B) \in \mathscr{C}^2$, alors $A+B \in \mathscr{C}$).
6. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme de degré pair et unitaire. Déterminer les limites
$$\ell_1=\lim_{x\to-\infty}P(x) \quad \text{et} \quad \ell_2=\lim_{x\to+\infty}P(x).$$
7. En déduire que si $P \in \mathbf{R}[X]$ désigne un polynôme de degré pair et unitaire, alors il existe deux polynômes à coefficients réels S, T et un réel $\lambda \geq 0$ tels que $P=S^2+T^2-\lambda$.

Exercice 28 Pour tout entier $n \geq 1$, on définit le polynôme $P_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}X^k$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, P_n admet une unique racine réelle strictement positive que l'on note x_n et établir que l'on a $1 < x_n \leq 2$.

2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $\displaystyle\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,\mathrm{d}t \geq \frac{n}{2}(x_n-1)^2$.

3. En déduire la convergence et la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

Exercice 29 (Polynômes interpolateurs de Lagrange)
Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et deux $n+1$-uplets $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$, $(y_0, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$; on suppose que les x_i $(0 \leq i \leq n)$ sont deux à deux distincts. On cherche à déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{K}[X]$ vérifiant :

$$(\bigstar)\ :\ \forall i \in [\![0,n]\!],\ P(x_i) = y_i.$$

1. On suppose que P_1 et P_2 désignent deux éléments de de $\mathbf{K}_n[X]$ vérifiant $(\bigstar)$. Montrer que $P_1 = P_2$.
2. Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on pose
$$L_i = \prod_{\substack{0\leq k\leq n\\ k\neq i}} \frac{X-x_k}{x_i-x_k}.$$
Évaluer L_i en x_j pour $j \in [\![0,n]\!]$. En déduire que le polynôme $P_0 = \sum_{i=0}^{n} y_i\, L_i$ vérifie $(\bigstar)$.
Que peut-on dire du degré du polynôme P_0 ?
3. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{K}[X]$ vérifiant $(\bigstar)$
Si P désigne un élément de $\mathbf{K}[X]$ vérifiant $(\bigstar)$, on pourra considérer la division euclidienne de P par $\prod_{k=0}^{n}(X-x_k)$.
4. Montrer que pour tout $P \in \mathbf{R}_n[X]$, on a $P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i$.

Exercice 30 (Polynômes de Tchebychev de première espèce)
On considère la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ T_{n+2} = 2X\,T_{n+1} - T_n.$$

1. Préciser T_2, T_3 et T_4.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :
   (a) $\deg(T_n) = n$ et si $n \geq 1$, le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} ;
   (b) $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$;
   (c) $\forall \theta \in \mathbf{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
3. Montrer que pour tout $(m,n) \in \mathbf{N}^2$, on a $T_m \circ T_n = T_{mn}$.
4. Pour tout entier naturel n, déterminer les racines de T_n situées dans l'intervalle $[-1,1]$ puis en déduire l'ensemble des racines de T_n.
5. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, factoriser T_n en produit de facteurs irréductibles de $\mathbf{R}[X]$.
6. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $(1-X^2)T_n'' - X\,T_n' + n^2 T_n = 0_{\mathbf{R}[X]}$.
En déduire les coefficients de T_n.
7. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2k}(-1)^k(1-X^2)^k X^{n-2k}$.

Exercice 31 (Écrit X-ENS 2021)
Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ un polynôme à coefficients dans $\mathbf{C}$ unitaire et de degré n. On note $z_1, \ldots, z_n$ les racines de P comptées avec multiplicité et $M = \max_{i\in[\![1,n]\!]} |z_i|$. Démontrer que

$$\forall i \in [\![0,n-1]\!] \quad |a_i| \leq \binom{n}{i} M^{n-i}.$$