Fiche d'exercices n° 23

Exercice 1 (Parce qu'il n'y a pas de questions stupides)

1. 8 coureurs se présentent à une course. Combien y a-t-il de gagnants possibles ?
2. À la cantine, vous avez le choix entre : 3 entrées, 2 plats et 4 desserts. Combien de menus peut-on composer ?
3. Lors d'une journée du championnat de Ligue 1, 10 matchs ont lieu. Vous jouez au loto foot et vous voulez gagner à coup sûr. Combien de grilles devez-vous acheter ?

Exercice 2 Déterminer le nombre d'anagrammes des mots : MATHEMATIQUES ; DENOMBREMENT ; KANGOUROU.

Exercice 3 Au Scrabble, vous disposez des lettres SCRABBLE. Vous ne connaissez pas la règle contraignant le joueur à écrire un mot qui existe réellement.
Combien de mots pouvez-vous faire avec ces lettres ?

Exercice 4 À l'école, n enfants (avec $n \geq 1$) se mettent dans une ronde. Combien y a-t-il de façons de les disposer ?

Exercice 5 Soit $n \in \mathbf{N}$. Déterminer le plus grand élément des ensembles

$$E = \left\{ \mathrm{A}_n^k,\ k \in [\![0, n]\!] \right\} \quad \text{et} \quad F = \left\{ \binom{n}{k} = \mathrm{C}_n^k,\ k \in [\![0, n]\!] \right\}.$$

Exercice 6 (L'égalité de Chu-Vandermonde)
Soient $(m, n) \in \mathbf{N}^2$ et $p \in [\![0, m+n]\!]$. Démontrer la formule suivante de façon combinatoire, en considérant le développement de $(1+X)^n(1+X)^m$ puis en dérivant (plusieurs fois) le polynôme X^{m+n} :

$$\binom{n+m}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k}.$$

En déduire une expression simple de $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 7 Soient E, F deux ensembles non vides. Montrer qu'il existe une application injective $f : E \to F$ si et seulement s'il existe une application surjective $g : F \to E$.

Exercice 8 Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Calculer $\sum\limits_{X \in \mathscr{P}(E)} \mathrm{Card}(X)$.

Exercice 9 Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Déterminer le nombre de couples $(X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$.

Exercice 10 Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Combien existe-t-il de couples de parties de E dont la réunion est E ?

Exercice 11 Soient $(n, p) \in (\mathbf{N}^*)^2$ tel que $n \leq p$, $E = [\![1, n]\!]$ et $F = [\![1, p]\!]$. Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de E dans F ?

Exercice 12 Montrer qu'une application croissante $f : [\![0, n]\!] \to [\![0, n]\!]$ admet au moins un point fixe.

Solution

Soit une application croissante $f : [\![0, n]\!] \to [\![0, n]\!]$. Considérons l'ensemble

$$A = \{k \in [\![0, n]\!] \mid f(k) \geq k\}.$$

L'ensemble A est une partie de $[\![0, n]\!]$ non vide car $f(0) \geq 0$ donc $0 \in A$. Donc A est une partie non vide et majorée de $\mathbf{Z}$. Il s'ensuit que A admet un maximum (*i.e.* un plus grand élément) noté M. On a $M \in A$ donc $f(M) \geq M$. En appliquant f qui est croissante à cette dernière inégalité, on obtient $f(f(M)) \geq f(M)$ donc $f(M) \in A$, et donc $f(M) \leq M$. Finalement, $f(M) = M$. Autrement dit, f admet au moins un point fixe.

Exercice 13 Déterminer toutes les applications $f : [\![0, n+1]\!] \to [\![0, n]\!]$ qui sont croissantes et surjectives.

Exercice 14 À l'EuroMillions, le joueur choisit 5 numéros compris entre 1 et 50 et 2 numéros étoiles compris entre 1 et 12.
Combien y a-t-il de tirages possibles ?

Exercice 15 Soit $(n,k)\in(\mathbf{N}^*)^2$ tel que $k\leq n$. On dispose d'une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On tire successivement et sans remise k jetons.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages possibles avec les jetons numérotés de 1 à k tirés dans l'ordre croissant ; décroissant ; dans un ordre quelconque ?
3. Combien y a-t-il de tirages où le jeton 1 apparaît parmi les k jetons ?
4. Mêmes questions mais les tirages se font désormais avec remises.

Exercice 16 On lance une pièce monnaie n fois.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Si $k\in[\![0,n]\!]$, combien y a-t-il de tirages menant à exactement k piles et $n-k$ faces ?

Exercice 17 On lance 6 fois un dé. Quelle est la probabilité d'obtenir les 6 nombres dans un ordre quelconque. Et si on lance 7 fois le dé ?

Exercice 18 Combien y a-t-il de façons de répartir $n\in\mathbf{N}^*$ boules identiques dans $p\in\mathbf{N}^*$ urnes ? Et si l'on impose que toutes les urnes aient au moins une boule ?

Exercice 19 Soit $(n,k)\in(\mathbf{N}^*)^2$.

1. Déterminer le cardinal de l'ensemble $A_k=\left\{(i_1,\dots,i_k)\in\mathbf{N}^k \mid i_1+\cdots+i_k=n\right\}$.
2. Déterminer le cardinal de l'ensemble $B_k=\left\{(i_1,\dots,i_k)\in\mathbf{N}^k \mid i_1+\cdots+i_k\leq n\right\}$.

Exercice 20 Combien y a-t-il de façons de disposer quatre tours sur un échiquier sans qu'elles puissent se prendre ?

Exercice 21 Soit $n\in\mathbf{N}^*$. On choisit de mettre n stylos dans sa trousse. Sachant que pour chaque stylo, il y a quatre possibilités pour la couleur (bleu, noir, rouge, vert), combien y a-t-il de compositions possibles ?

Exercice 22 (Formule d'inversion de Poisson)

1. Soient trois entiers naturels k,ℓ,n tels que $\ell\leq k\leq n$.
   a. Montrer que $\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}=\binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}$. En donner une interprétation combinatoire.

   Solution

   On a $0\leq\ell\leq k\leq n$ donc

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}&=\frac{n!}{k!(n-k)!}\times\frac{k!}{\ell!(k-\ell)!}\\&=\frac{n!}{\ell!(n-k)!(k-\ell)!}\\&=\frac{n!}{\ell!(n-\ell)!}\times\frac{(n-\ell)!}{(k-\ell)!(n-\ell-(k-\ell))!}\\&=\binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}.\end{aligned}$$

   Voici une interprétation combinatoire. Considérons une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. L'expérience consiste à en choisir k puis parmi ces k, à en colorier ℓ. Il y a $\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}$ façons de réaliser cette expérience. Mais réaliser cette expérience revient à d'abord choisir les ℓ jetons qui vont être coloriés puis de choisir les $k-\ell$ jetons restants parmi les $n-\ell$ jetons encore présents dans l'urne. Il y a $\binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}$ façons de réaliser cette expérience.

   On retrouve bien la relation $\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}=\binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}$.

   b. En déduire que si $\ell<n$, alors $\sum\limits_{k=\ell}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}=0$.

Solution

On suppose $\ell < n$. D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=\ell}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{\ell} &= \sum_{k=\ell}^{n}(-1)^k\binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}\\ &= \binom{n}{\ell}\sum_{k=\ell}^{n}(-1)^k\binom{n-\ell}{k-\ell}\\ &= \binom{n}{\ell}\sum_{k=0}^{n-\ell}(-1)^{k+\ell}\binom{n-\ell}{k} && \text{Changement d'indice } k\to k+\ell.\\ &= \binom{n}{\ell}(-1)^\ell\sum_{k=0}^{n-\ell}\binom{n-\ell}{k}(-1)^k\\ &= \binom{n}{\ell}(-1)^\ell(1-1)^{n-\ell}\\ &= 0 && \text{car } n-\ell\geq 1.\end{aligned}$$

2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs réelles et soit $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par : $\forall n\in\mathbf{N},\ b_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k$.

   Monter que l'on a : $\forall n\in\mathbf{N},\ a_n=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}b_k$.

   Solution

   Soit $n\in\mathbf{N}$. On a

$$\begin{aligned}(-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}b_k &= (-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}a_\ell && \text{Attention aux indices de sommations!}\\ &= (-1)^n\sum_{0\leq\ell\leq k\leq n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}a_\ell\\ &= (-1)^n\sum_{\ell=0}^{n}a_\ell\sum_{k=\ell}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{\ell} && \text{Permutation des deux sommes.}\\ &= (-1)^n a_n\sum_{k=n}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{\ell} && \text{car si } \ell<n,\ \sum_{k=\ell}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}=0,\\ &= (-1)^n a_n(-1)^n\binom{n}{n}\binom{n}{n}\\ &= a_n.\end{aligned}$$

Exercice 23 Si n désigne un entier naturel non nul, on appelle *dérangement* de $[\![1,n]\!]$ une permutation $\sigma\in S_n$ sans point fixe ; c'est-à-dire telle que

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\ \sigma(k)\neq k.$$

On note d_n le nombre de dérangements de S_n et on prend la convention $d_0=1$.

1. Montrer que l'on a : $\forall n\in\mathbf{N},\ n!=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d_k$.

   Solution

   La formule est valide pour $n=0$ avec la convention $d_0=1$.
   Soit $n\in\mathbf{N}^*$.

   Remarque — Rappelons que le *support* d'une permutation σ de $[\![1,n]\!]$ est défini par

$$\mathrm{Supp}(\sigma)=\{k\in[\![1,n]\!]\mid\sigma(k)\neq k\}.$$

   Par conséquent, une permutation $\sigma\in S_n$ est un dérangement si et seulement si $\mathrm{Supp}(\sigma)=\varnothing$.

On a la partition suivante de S_n

$$S_n = \bigsqcup_{k=0}^{n} \bigsqcup_{A\in\mathscr{P}_k(E)} \{\sigma \in S_n \mid \mathrm{Supp}(\sigma) = [\![1,n]\!] \setminus A\}$$

donc

$$\mathrm{Card}(S_n) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{A\in\mathscr{P}_k(E)} \mathrm{Card}\left(\{\sigma \in S_n \mid \mathrm{Supp}(\sigma) = [\![1,n]\!] \setminus A\}\right)$$

Or, si A désigne une partie non vide de $[\![1,n]\!]$ telle que $\mathrm{Supp}(\sigma) = [\![1,n]\!] \setminus A$, alors σ est la donnée d'un dérangement de A. Donc pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, pour tout $A \in \mathscr{P}_k([\![1,n]\!])$, on a

$$\mathrm{Card}\left(\{\sigma \in S_n \mid \mathrm{Supp}(\sigma) = [\![1,n]\!] \setminus A\}\right) = d_k$$

De plus, si $A = \varnothing$,

$$\mathrm{Card}\left(\{\sigma \in S_n \mid \mathrm{Supp}(\sigma) = [\![1,n]\!]\}\right) = \mathrm{Card}\left(\left\{\mathrm{Id}_{[\![1n,n]\!]}\right\}\right) = 1 = d_0.$$

Ainsi, puisque $\mathrm{Card}(S_n) = n!$, il vient

$$n! = \sum_{k=0}^{n} d_k \,\mathrm{Card}\,(\mathscr{P}_k([\![1,n]\!]) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k.$$

2. En déduire : $\forall n \in \mathbf{N},\ d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

   Solution

   Il suffit d'utiliser la formule d'inversion de Poisson de l'exercice précédent.

Exercice 24 Dans une classe de n étudiants (où $n \in \mathbf{N} \setminus \{0,1\}$), on décide de s'offrir des cadeaux pour Noël. Le protocole est le suivant :

— on place dans une urne n papiers avec le noms de chacun des étudiants;
— chaque étudiant tire un papier et s'il tire son nom, le remet dans l'urne et effectue un nouveau tirage.

1. Quelle est la probabilité que le dernier tire le papier avec son propre nom?

   Solution

   En fait, je ne sais pas!

   On pourrait considérer l'univers

$$\Omega = \{\sigma \in S_n \mid \forall k \in [\![1,n-1]\!],\ \sigma(k) \neq k\}$$

   (la k^{e} personne offre son cadeau à la $\sigma(k)^{\mathrm{e}}$ personne) et l'événement

$$A = \{\sigma \in \Omega \mid \sigma(n) = n\}.$$

   On montre assez facilement que $\mathrm{Card}(A) = d_{n-1}$ et $\mathrm{Card}(\Omega) = d_n + d_{n-1}$. Cependant, la probabilité uniforme n'est pas le bon choix. En effet, avec $n = 3$, notons P la probabilité recherchée. On a

$$\Omega = \left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\right\}$$

   et pourtant,

   - $\mathrm{P}\left(\left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\right\}\right) = \frac{1}{4}$;
   - $\mathrm{P}\left(\left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\right\}\right) = \frac{1}{4}$;
   - $\mathrm{P}\left(\left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\right\}\right) = \frac{1}{2}$.

2. Lors de la remise des cadeaux, le premier étudiant donne son cadeau puis chaque étudiant recevant un cadeau donne le sien.

   Quelle est la probabilité que tout le monde reçoive son cadeau en un coup?

   Solution

   Nous allons ici supposer l'univers Ω désigne l'ensemble des dérangements de $[\![1,n]\!]$ et nous le munissons de la probabilité uniforme.

Remarque — Mais nous avons vu dans la question précédente que la probabilité n'était pas la probabilité uniforme ! Mais c'est une faille dans le protocole d'affectations, idéalement, il faudrait qu'elle soit uniforme...

On a $\mathrm{Card}(\Omega) = d_n$. Notons A l'événement « Tout le monde reçoit son cadeau en un coup ». En fait, A désigne l'ensemble des cycles de longueur n (qui sont tous des dérangements). Or, un cycle de longueur n de $[\![1, n]\!]$ est la donnée d'un n-uplet qui dont le premier élément est 1. Il y a donc $(n-1)!$ cycles de longueur n. Ainsi, $\mathrm{Card}(A) = (n-1)!$ et

$$\mathrm{P}(A) = \frac{(n-1)!}{d_n}.$$

Remarque — On peut montrer que pour tout entier naturel n, on a

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right| \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

donc

$$\frac{n!}{\mathrm{e}} - \frac{1}{n+1} \leq d_n \leq \frac{n!}{\mathrm{e}} + \frac{1}{n+1}$$

puis

$$\frac{n}{\mathrm{e}} - \frac{1}{(n-1)!(n+1)} \leq \frac{1}{\mathrm{P}(A)} \leq \frac{n}{\mathrm{e}} + \frac{1}{(n-1)!(n+1)}$$

et ainsi,

$$\frac{\mathrm{e}}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{n}{(n-1)!(n+1)}} = \frac{1}{\frac{n}{\mathrm{e}} + \frac{1}{(n-1)!(n+1)}} \leq \mathrm{P}(A) \leq \frac{1}{\frac{n}{\mathrm{e}} - \frac{1}{(n-1)!(n+1)}} = \frac{\mathrm{e}}{n} \times \frac{1}{1 - \frac{n}{(n-1)!(n+1)}}$$

d'où,

$$\mathrm{P}(A) \approx \frac{\mathrm{e}}{n}.$$