

TD 1 - Espaces vectoriels

Exercice 1.

Justifier que les ensembles suivants ne sont pas des espaces vectoriels :

- $E_1 = \{M \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R}) \mid M - {}^t M = I_5\}$
- $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$
- $E_3 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = 3\}$

Exercice 2. : espaces implicites

Pour chacun des ensembles suivants, répondre aux questions suivantes :

1. Montrer que c'est un espace vectoriel.
2. Déterminer sa dimension.

- On pose X le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 $E_1 = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}$
- On pose $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.
 $E_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid BX = 4X\}$
- $E_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P'(0) = 0\}$
- $E_4 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid 2P(1-X) = XP'(X)\}$
- $E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$
- $E_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$

Exercice 3. : espaces explicites

Pour chacun des ensembles suivants, répondre aux questions suivantes :

1. Montrer que c'est un espace vectoriel.
2. Déterminer sa dimension.

- L'ensemble E_1 des polynômes de la forme $P(X) = aX^3 + bX^2 - aX + b$, avec a , et b des réels.
- L'ensemble E_2 des matrices $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a+2c & b-2c \\ -b+2c & a+2c \end{pmatrix}$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
- L'ensemble E_3 des triplets de réels de la forme $(a + 3b + 4c + 2d, 2a - b + c - 3d, -a - 2b + c + 3d)$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 4.

1. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants : $\vec{v}_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, -1, 1)$, $\vec{v}_3 = (-1, 1, 0, 2)$ et $\vec{v}_4 = (1, -1, 2, 0)$.

Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Déterminer les coordonnées de $\vec{u} = (1, 1, 1, 1)$ dans cette base.

2. Soient les vecteurs $\vec{u}_1 = (1, -1, 2, 1)$, $\vec{u}_2 = (2, 1, -1, 1)$, $\vec{u}_3 = (1, 2, 1, -1)$ et $\vec{u}_4 = (4, 2, 2, 1)$.

Vérifier que $\vec{u}_4 \in \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$. Quel est le rang de la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$?

Exercice 5.

Soit E un ev muni d'une base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Soient $\vec{u} = \vec{i} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$ et $\vec{w} = \vec{j} - \vec{k}$. Montrer que $B' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une autre base de E .
2. Déterminer la matrice U des coordonnées de $\vec{u}$ dans la base B . Donner la matrice P de passage de B à B' et vérifier (autrement que ci-dessus) que B' est une base de E .
3. Déterminer la matrice de passage de B' à B et en déduire l'expression des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Exercice 6.

Soient $\vec{u} = (-1, 1, 2)$, $\vec{v} = (2, 3, -1)$ et $\vec{w} = (1, 0, m)$. Déterminer m pour que $\vec{w} \in Vect(\vec{u}, \vec{v})$.

Quel est le rang de la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$?

Exercice 7.

Déterminer les réels a pour lesquels la famille $\{(2a, a - 1), (a - 3, a + 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Déterminer alors les coordonnées du vecteur $(a, a + 1)$ dans cette base.

Exercice 8.

Soit E espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On pose : $P_0(X) = (1 + X)^3$, $P_1(X) = X(1 + X)^2$, $P_2(X) = X^2(1 + X)$, $P_3(X) = X^3$. On note $\mathcal{C} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$.

1. Rappeler la base canonique de E , que l'on notera $\mathcal{B}$. Donner la matrice de la famille $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$.
2. Montrer de deux manières que (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de E .
3. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$.
4. Soit $Q(X) = 3X^3 + X^2 - 2X + 1$. Déterminer les coordonnées de Q dans la base (P_0, P_1, P_2, P_3) .

Exercice 9.

Démontrer que dans l' $ev \mathbb{R}^3$ les vecteurs $\vec{u} = (2, 3, -1)$ et $\vec{v} = (1, -1, -2)$ d'une part et les vecteurs $\vec{u}' = (3, 7, 0)$ et $\vec{v}' = (5, 0, -7)$ d'autre part, engendrent le même sous-espace vectoriel.

Exercice 10.

1. Justifier que $(D_2, +, \cdot)$ ensemble des fonctions numériques deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, est un espace vectoriel.
2. Soit $E = \{f \in D_2 | f'' = 2f' - f\}$. Montrer que E est un sev de D_2 .
3. Vérifier que $f_1 : x \mapsto e^x$ et $f_2 : x \mapsto xe^x$ forment une famille libre de E .
4. Soit $f \in E$. On pose $h(x) = f(x)e^{-x}$. Montrer que $h'' = 0$. En déduire l'expression de h , puis de f . Donner alors une base de E .

Exercice 11.

Soit E l'ensemble des suites réelles vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = -u_{n+1} + 6u_n$$

Vous connaissez déjà E : ensemble des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. Mais vous avez admis la formule.

Ici, nous allons la démontrer grâce à la structure d'espace vectoriel.

1. Déterminer les suites géométriques non nulles (q_n) de E .
2. Montrer que E est un sev de l'ensemble des suites réelles S .
3. Soit $(u_n) \in E$.

(a) Déterminer α et β tels que :
$$\begin{cases} u_0 &= \alpha + \beta \\ u_1 &= -3\alpha + 2\beta \end{cases}$$

(b) On associe à (u_n) la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \alpha(-3)^n - \beta 2^n$$

Vérifier que $(v_n) \in E$, puis en remarquant que $v_0 = v_1 = 0$, établir que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 0$.

- (c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
- (d) Quelle est la dimension de E ? Donner une base de E .

Exercice 12. : intersection et réunion d'espaces vectoriels

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E .

1. **intersection** :

- (a) Montrer que $F \cap G$ est un espace vectoriel.
- (b) $E = \mathbb{R}^3$. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$ et $G = \{(a, a + b, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. On admet que F et G sont deux sev de $\mathbb{R}^3$.
 - i. Déterminer une base de F et une base de G .
 - ii. Déterminer une équation cartésienne de G .
 - iii. Déterminer une base de $F \cap G$.

2. **réunion** :

- (a) **Contre-exemple** : On pose $E = \mathbb{R}^2$, $F = Vect((1, 0))$ et $G = Vect((0, 1))$. Montrer que $F \cup G$ n'est pas un espace vectoriel.
- (b) **Cas général** : Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 13. : somme d'espaces vectoriels

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E .

On définit un nouvel ensemble, noté $F + G$, par :

$$F + G = \{f + g; (f, g) \in F \times G\}$$

- 1. Montrer que $F + G$ est un espace vectoriel puis montrer qu'il contient F et G .
- 2. Soit H un s.e.v de E contenant F et G , montrer que $F + G \subset H$.
On dit que $F + G$ est le plus petit espace vectoriel contenant F et G .
- 3. Montrer que si $G \subset F$ alors $F + G = F$.
- 4. Déterminer une base de $F + G$ dans les cas suivants :
 - (a) $E = \mathbb{R}^4$; $F = \{\lambda(1, 0, 2, 1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $G = Vect((2, 1, 2, 1), (3, 1, 4, 2))$.
 - (b) $E = \mathbb{R}[X]$; $F = Vect(1, X, X^2)$ et $G = Vect(X^3, X^4)$.
- 5. On suppose désormais que $F \cap G = \{0_E\}$.
 - (a) Montrer que tout vecteur $u \in F + G$ se décompose de manière unique sous la forme $u = f + g$ où $f \in F$ et $g \in G$.
 - (b) Soit $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ une base de F et $(g_1, g_2, \dots, g_p)$ une base de G . Montrer que $(f_1, f_2, \dots, f_n, g_1, g_2, \dots, g_p)$ est une base de $F + G$.
 - (c) En déduire une relation entre $\dim(F + G)$, $\dim(F)$ et $\dim(G)$ dans ce cas particulier.
Cette formule est-elle vraie dans le cas général?
- 6. Soient A , B et C des sev de E . Montrer les propriétés suivantes :
 - $[A \cap B = A + B] \Leftrightarrow [A = B]$.
 - $[A \cap B + A \cap C] \subset [A \cap (B + C)]$
 - $[A + (B \cap C)] \subset [(A + B) \cap (A + C)]$.