

## TD 8 : Réduction

**Exercice 1** (EML 2006). Soient  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

On considère  $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  l'application linéaire définie, pour tout  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , par :  $f(M) = AM - MD$ .

0. Vérifier que  $f$  est bien linéaire
1. Déterminer le noyau de  $f$  et donner sa dimension.
2. Quelle est la dimension de l'image de  $f$  ?
3. Montrer que 1 est valeur propre de  $f$  et déterminer le sous-espace propre associé.
4. Montrer que  $-1$  est aussi valeur propre de  $f$ .
5. Est-ce que  $f$  est diagonalisable ?
6. Résoudre l'équation  $f(M) = \lambda M$  pour tout  $\lambda$  réel  $\notin \{-1, 0, 1\}$ .
7. Montrer que  $f \circ f \circ f = f$ .

**Exercice 2.** Soit l'application linéaire :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^t M \end{array}$$

1. Calculer  $\Phi^2$  puis justifier que  $\Phi$  est bijective et donner sa bijection réciproque.
2. Justifier que  $\text{Sp}(\Phi) \subset \{-1; 1\}$ .
3.  $\Phi$  est-elle diagonalisable ?
4. Retrouver  $\Phi^2$  par calcul matriciel .

**Exercice 3.** Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  et soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  défini par  $f(X) = AXB$ .

1. Déterminer la matrice  $M$  de  $f$  dans la base canonique.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $f$ .  $f$  est-elle diagonalisable ?
3. Diagonaliser  $M$ .

**Exercice 4.** Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$  et la matrice  $M_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & 4+a \end{pmatrix}$ .

1. Justifier sans calculs qu'il existe  $P$  inversible et  $D$  diagonale telles que  $A = PDP^{-1}$ .  
Expliciter une telle matrice  $D$ .
2. (a) Vérifier que  $D(D - I)(D - 4I) = 0$ .  
(b) En déduire que  $A^3 = 5A^2 - 4A$ .  
(c) Trouver une matrice  $B$ , fonction de la matrice  $P$ , telle que  $B^2 = A$ .  
(d) Prouver qu'il existe  $D_a$  diagonale (à expliciter) telle que  $M_a = PD_aP^{-1}$ .

**Exercice 5.** Soient  $a, b$  et  $c$  trois réels non nuls et  $M$  la matrice carrée d'ordre 3 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{a} & 1 & \frac{b}{c} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que  $M^2 = 3M$ .
2. Montrer en raisonnant par l'absurde que  $M$  n'est pas inversible.  
Montrer de même que  $M - 3I$  n'est pas inversible.
3.  $M$  est-elle diagonalisable ?

- Déterminer une matrice  $P$  inversible de première ligne  $(a \ a \ a)$  et une matrice  $D$  diagonale dont les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre décroissants, telles que  $M = PDP^{-1}$ .

**Exercice 6.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3 et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$ .

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E$  tel que :  $f(e_1) = 3e_1 + 3e_2 + 2e_3$ ,  $f(e_2) = 2f(e_1)$  et  $f(e_3) = 3e_3$ .

- Ecrire  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  puis calculer  $f(e_1 + e_2 + e_3)$ .
- Donner  $\text{Sp}(f)$  sans calcul supplémentaire.
- Diagonaliser  $A$ .

**Exercice 7.**  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- $J$  est-elle diagonalisable ? inversible ? En déduire une valeur propre de  $J$ .
- Justifier avec le minimum de calculs de  $P^{-1}JP$  est diagonale et donner cette matrice.

**Exercice 8.** Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

- Déterminer les éléments propres de  $f$ .  $f$  est-elle diagonalisable ?
- Déterminer trois vecteurs  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  de  $\mathbb{R}^3$  formant une base de  $\mathbb{R}^3$  et vérifiant :

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) &= -2\vec{e}_1 \\ f(\vec{e}_2) &= \vec{e}_2 \\ f(\vec{e}_3) &= \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

En déduire une matrice triangulaire semblable à  $A$ .

**Exercice 9.** Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  est  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

- Montrer que  $(f - Id)^2 = 0$ .
- En déduire que  $f$  n'est pas diagonalisable.
- Déterminer une base  $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $f$  s'écrit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Justifier qu'il existe  $P$  (que l'on explicitera) telle que  $A = PTP^{-1}$ .

**Exercice 10.**

Soit  $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$  dont la matrice dans la base canonique est  $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- Déterminer une base de  $\text{Im } v$  et  $\text{Ker } v$ . En déduire une valeur propre de  $v$ .
- Déterminer les autres valeurs propres de  $v$ . Justifier sans autres calculs que  $v$  est diagonalisable.

**Exercice 11.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3 et soit  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  une base de  $E$ . On note  $f$  l'endomorphisme dont la matrice  $J$  relativement à la base  $\mathcal{B}$  est :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trouver sans calculs les valeurs propres et les sous espaces propres de  $f$ .  
 $f$  est-il diagonalisable ?

**Exercice 12.** 1. **Réduction simultanée :** Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  admettant 3 valeurs propres distinctes  $a, b$  et  $c$  et  $g$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  qui commute avec  $f$  (i.e.  $g \circ f = f \circ g$ ).  
Nous allons prouver que  $g$  est diagonalisable et qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  constituée de vecteurs propres commun à  $f$  et à  $g$ .

- Soit  $u$  un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $a$ . Montrer que soit  $g(u)$  est nul, soit  $g(u)$  est aussi un vecteur propre de  $f$  associé à la même valeur propre  $a$ .
- Rappeler la valeur de  $\dim(E_a(f))$  puis en déduire que  $u$  est un vecteur propre de  $g$ .  
*On remarque le raisonnement serait le même si  $u$  était un vecteur propre de  $f$  associé à une autre valeur propre ( $b$  ou  $c$ ).*  
*On a donc obtenu le résultat suivant : si  $u$  est un vecteur propre de  $f$  alors  $u$  est un vecteur propre de  $g$ .*
- En déduire que  $f$  et  $g$  sont diagonalisables dans une même base  $\mathcal{B}$ .

2. **Application :** soit  $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  tel que  $h \circ h = f$ .

- Montrer que  $h$  commute avec  $f$ .
- En utilisant la partie 1., en déduire une condition sur  $a, b$  et  $c$  pour qu'il existe une telle fonction  $h$ .

**Exercice 13.**

Dans cet exercice, on note  $C^0$  l'espace vectoriel des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $\Phi$  l'application définie sur  $C^0$  qui, à toute fonction  $f$  de  $C^0$ , associe la fonction  $g = \Phi(f)$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

- Rappeler pourquoi, pour toute fonction  $f$  de  $C^0$ ,  $\Phi(f)$  est dérivable et expliciter sa fonction dérivée.
- Vérifier que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $C^0$ .
- Donner un exemple de fonction continue sur  $\mathbb{R}$  et non dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  
L'application  $\Phi$  est-elle surjective ? Injective ?
- (a) Justifier que 0 n'est pas une valeur propre de  $\Phi$ .  
Dans la suite on considère une fonction  $f$  telle que  $\Phi(f) = \lambda f$  avec  $\lambda \neq 0$ .  
(b) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  
(c) En dérivant la fonction  $x \rightarrow f(x)e^{-\frac{x}{\lambda}}$ , montrer que  $f$  ne peut être que la fonction nulle.  
(d) Conclure alors que  $\Phi$  n'admet aucune valeur propre.