

TD 1 : correction

Exercice 1.

Pour prouver qu'un ensemble n'est pas un espace vectoriel, il faut donner un contre-exemple à l'une des propriétés générales qui devraient être vraies. Cependant (à part le fait que l'élément nul soit dans l'espace), il n'est pas évident de le "sortir de son chapeau"! Pour cela on va tester une par une les quatre propriétés, et si l'une d'entre elles pose problème, on essaiera de construire un contre-exemple avec le problème rencontré :

1. — $E_1 \subset \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ qui est bien un espace vectoriel.

— La matrice nulle, $M = 0$, vérifie ${}^tM = 0$, donc $M - {}^tM = 0 \neq I_5$, donc ce n'est pas un élément de E_1 , qui n'est donc pas un espace vectoriel.

2. — $E_2 \subset \mathbb{R}^2$ qui est bien un espace vectoriel.

— Le vecteur nul, $(x, y) = (0, 0)$, vérifie bien $y = 0 \geq 0$, donc c'est un élément de E_2 .

— Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) des éléments de E_2 , alors :

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

vérifie $y_1 + y_2 \geq 0$ car $y_1 \geq 0$ et $y_2 \geq 0$, c'est donc un élément de E_2 , qui est bien stable par somme.

— Soit (x, y) un élément de E_2 et λ un réel, alors :

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

appartient à E_2 si et seulement si $\lambda y \geq 0$. Comme c'est un produit, avec $y \geq 0$, cela ne marche que si $\lambda \geq 0$: on peut donc construire un contre-exemple : on prend un élément de E_2 , par exemple :

$$(x, y) = (0, 1) \in E_2 \quad \text{car } y = 1 \geq 0$$

et un réel λ de façon à ce que la dernière propriété ne marche pas, donc strictement négatif : par exemple avec $\lambda = -1$:

$$\lambda(x, y) = -(0, 1) = (0, -1) \notin E_2 \quad \text{car } -1 < 0.$$

On en déduit alors que E_2 n'est pas un espace vectoriel.

3. — $E_2 \subset \mathbb{R}[X]$ qui est bien un espace vectoriel.

— Le polynôme nul, $P = 0$, n'est pas de degré 3 (son degré vaut, par convention, $-\infty$) donc n'appartient pas à E_3 , qui n'est donc pas un espace vectoriel.

Exercice 2. : espaces implicites

Les espaces sont tous sous forme implicite, donc on va utiliser la caractérisation des sous-espaces vectoriels à chaque fois pour prouver que ce sont des espaces vectoriels.

Pour obtenir la dimension, il faut d'abord trouver une base : la méthode est d'exhiber une famille génératrice en explicitant l'espace, puis de prouver que celle-ci est libre ou, dans le cas contraire, d'en retirer les vecteurs "en trop" jusqu'à obtenir une famille à la fois génératrice et libre.

1. Montrons que E_1 est un espace vectoriel :

- $E_1 \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel.
- La matrice nulle, $A = 0$, vérifie $AX = 0X = 0$, donc c'est bien un élément de E_1 .
- Soient A_1 et A_2 des éléments de E_1 (donc vérifiant $A_1X = A_2X = 0$), montrons que $(A_1 + A_2) \in E_1$:

$$(A_1 + A_2)X = A_1X + A_2X = 0 + 0 = 0$$

donc $(A_1 + A_2) \in E_1$, qui est donc stable par somme.

- Soit A un élément de E_1 (donc $AX = 0$) et λ un réel, montrons que $(\lambda A) \in E_1$:

$$(\lambda A)X = \lambda AX = \lambda \times 0 = 0$$

donc $(\lambda A) \in E_1$, qui est donc stable par produit par un réel.

On en déduit finalement que E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc un espace vectoriel.

Pour l'expliciter, on résout l'équation qui le caractérise : on prend un élément quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on écrit :

$$\begin{aligned} AX = 0 &\iff \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a+b=0 \\ c+d=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-b \\ c=-d \end{cases} \\ &\iff X = \begin{pmatrix} -b & b \\ -d & d \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$E_1 = \left\{ b \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ tq } b, d \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

La famille $\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right]$ est donc génératrice de E_1 . De plus elle est constituée de deux vecteurs qui ne sont pas colinéaires donc elle est libre, c'est donc une base de E_1 et

$$\dim(E_1) = \text{Card} \left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right] = 2.$$

2. Montrons que E_2 est un espace vectoriel :

- $E_2 \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel.
- Le vecteur nul, $X = 0$, vérifie $BX = B0 = 0$ d'une part, et $4X = 4 \times 0 = 0$ d'autre part, donc $BX = 4X$ et c'est bien un élément de E_2 .
- Soient X_1 et X_2 des éléments de E_2 (donc vérifiant $BX_1 = 4X_1$ et $BX_2 = 4X_2$), montrons que $(X_1 + X_2) \in E_2$:

$$B(X_1 + X_2) = BX_1 + BX_2 = 4X_1 + 4X_2 = 4(X_1 + X_2)$$

donc $(X_1 + X_2) \in E_2$, qui est donc stable par somme.

- Soit X un élément de E_2 (donc $BX = 4X$) et λ un réel, montrons que $(\lambda X) \in E_2$:

$$B(\lambda X) = \lambda BX = \lambda 4X = 4(\lambda X)$$

donc $(\lambda X) \in E_2$, qui est donc stable par produit par un réel.

On en déduit finalement que E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, donc un espace vectoriel.

Pour l'expliciter, on résout l'équation qui le caractérise : on prend un élément quelconque de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et on écrit :

$$\begin{aligned} BX = 4X &\iff \begin{pmatrix} -2x - 2y - 6z \\ x - y + z \\ x + 3y + 5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 4z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -6x - 2y - 6z = 0 \\ x - 5y + z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} L_2 \leftarrow 6L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 6L_3 + L_1 \end{cases} \begin{cases} -6x - 2y - 6z = 0 \\ -32y = 0 \\ 16y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$E_2 = \left\{ z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ tq } z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

La famille $\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$ est donc génératrice de E_2 . De plus elle est constituée d'un seul vecteur qui n'est pas nul donc elle est libre, c'est donc une base de E_2 et

$$\dim(E_2) = \text{Card} \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 1.$$

3. Montrons que E_3 est un espace vectoriel :

— $E_3 \subset \mathbb{R}_3[X]$ qui est un espace vectoriel.

— Le polynôme nul, $P = 0$, vérifie pour tout x , $P(x) = 0$ donc $P(0) = 0$, puis pour tout x , $P'(x) = 0$, et $P'(0) = 0$: c'est bien un élément de E_3 .

— Soient P_1 et P_2 des éléments de E_3 (donc vérifiant $P_1(0) = P'_1(0) = 0$ et $P_2(0) = P'_2(0) = 0$), montrons que $(P_1 + P_2) \in E_3$:

$$(P_1 + P_2)(0) = P_1(0) + P_2(0) = 0 + 0 = 0 \quad \text{et} \quad (P_1 + P_2)'(0) = P'_1(0) + P'_2(0) = 0 + 0 = 0$$

donc $(P_1 + P_2) \in E_3$, qui est donc stable par somme.

— Soit P un élément de E_3 (donc $P(0) = P'(0) = 0$) et λ un réel, montrons que $(\lambda P) \in E_3$:

$$(\lambda P)(0) = \lambda P(0) = \lambda \times 0 = 0 \quad \text{et} \quad (\lambda P)'(0) = \lambda P'(0) = \lambda \times 0 = 0$$

donc $(\lambda P) \in E_3$, qui est donc stable par produit par un réel.

On en déduit finalement que E_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$, donc un espace vectoriel.

Pour l'expliciter, on résout l'équation qui le caractérise : on prend un élément quelconque de $\mathbb{R}_3[X]$, $P = a + bX + cX^2 + dX^3$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, puis $P'(x) = b + 2cx + 3dx^2$ et on écrit :

$$\begin{aligned} P \in E_3 &\iff \begin{cases} P(0) = 0 \\ P'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \\ &\iff P = cX^2 + dX^3 \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$E_3 = \{ cX^2 + dX^3, \text{ tq } c, d \in \mathbb{R} \} = \text{Vect} [X^2, X^3].$$

La famille $[X^2, X^3]$ est donc génératrice de E_3 . De plus elle est constituée de deux vecteurs qui ne sont pas colinéaires donc elle est libre, c'est donc une base de E_3 et

$$\dim(E_3) = \text{Card}[X^2, X^3] = 2.$$

4. Montrons que E_4 est un espace vectoriel :

— $E_3 \subset \mathbb{R}_2[X]$ qui est un espace vectoriel.

— Le polynôme nul, $P = 0$, vérifie pour tout X , $P(X) = 0$ donc $2P(1 - X) = 2 \times 0 = 0$ et $XP'(X) = X \times 0 = 0$: c'est bien un élément de E_4 .

— Soient P_1 et P_2 des éléments de E_4 (donc vérifiant $2P_1(1 - X) = XP'_1(X)$ et $2P_2(1 - X) = XP'_2(X)$), montrons que $(P_1 + P_2) \in E_4$:

$$\begin{aligned} 2(P_1 + P_2)(1 - X) &= 2[P_1(1 - X) + P_2(1 - X)] = 2P_1(1 - X) + 2P_2(1 - X) = XP'_1(X) + XP'_2(X) \\ &= X[P'_1(X) + P'_2(X)] = X(P'_1 + P'_2)(X) \end{aligned}$$

donc $(P_1 + P_2) \in E_4$, qui est donc stable par somme.

— Soit P un élément de E_4 (donc $2P(1 - X) = XP'(X)$) et λ un réel, montrons que $(\lambda P) \in E_4$:

$$2(\lambda P)(1 - X) = 2\lambda P(1 - X) = \lambda \times 2P(1 - X) = \lambda \times XP'(X) = X(\lambda P)'(X)$$

donc $(\lambda P) \in E_4$, qui est donc stable par produit par un réel.

On en déduit finalement que E_4 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$, donc un espace vectoriel.

Pour l'expliciter, on résout l'équation qui le caractérise : on prend un élément quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$, $P = a + bX + cX^2$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = a + bx + cx^2$, puis $P'(x) = b + 2cx$ et on écrit :

$$\begin{aligned} P \in E_4 &\iff \forall x \in \mathbb{R}, 2[a + b(1 - x) + c(1 - x)^2] = x[b + 2cx] \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, 2[a + b - bx + c - 2cx + cx^2] = bx + 2cx^2 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, 2a + 2b - 2bx + 2c - 4cx + 2cx^2 - bx - 2cx^2 = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, (2a + 2b + 2c) + (-3b - 4c)x = 0 \\ &\iff \begin{cases} 2a + 2b + 2c = 0 \\ -3b - 4c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 1/3c \\ b = -4/3c \end{cases} \\ &\iff P = 1/3c - 4/3cX + cX^2 = c(1/3 - 4/3X + X^2) \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$E_4 = \{c(1/3 - 4/3X + X^2), \text{ tq } c \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}[1/3 - 4/3X + X^2].$$

La famille $[1/3 - 4/3X + X^2]$ est donc génératrice de E_4 . De plus elle est constituée d'un seul vecteur qui n'est pas nul donc elle est libre, c'est donc une base de E_4 et

$$\dim(E_4) = \text{Card}[1/3 - 4/3X + X^2] = 1.$$

5. Montrons que E_5 est un espace vectoriel :

— $E_5 \subset \mathbb{R}^2$ qui est un espace vectoriel.

- Le vecteur nul, $(x, y) = (0, 0)$, vérifie $x + 2y = 0 + 2 \times 0 = 0$ et c'est bien un élément de E_5 .
- Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) des éléments de E_5 (donc vérifiant $x_1 + 2y_1 = 0$ et $x_2 + 2y_2 = 0$), montrons que $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \in E_5$:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \text{et} \quad (x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) = x_1 + 2y_1 + x_2 + 2y_2 = 0 + 0 = 0$$

donc $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \in E_5$, qui est donc stable par somme.

- Soit (x, y) un élément de E_5 (donc $x + 2y = 0$) et λ un réel, montrons que $(\lambda(x, y)) \in E_5$:

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \quad \text{et} \quad (\lambda x) + 2 \times (\lambda y) = \lambda(x + 2y) = \lambda \times 0 = 0$$

donc $(\lambda(x, y)) \in E_5$, qui est donc stable par produit par un réel.

On en déduit finalement que E_5 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, donc un espace vectoriel.

Pour l'expliciter, on résout l'équation qui le caractérise : on prend un élément quelconque de $\mathbb{R}^2$, (x, y) et on écrit :

$$(x, y) \in E_5 \iff x + 2y = 0 \iff x = -2y \iff (x, y) = (-2y, y) = y(-2, 1)$$

On en déduit que :

$$E_5 = \{y(-2, 1), \text{ tq } y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}[(-2, 1)].$$

La famille $[(-2, 1)]$ est donc génératrice de E_5 . De plus elle est constituée d'un seul vecteur qui n'est pas nul donc elle est libre, c'est donc une base de E_5 et

$$\dim(E_5) = \text{Card}[(-2, 1)] = 1.$$

6. Montrons que E_6 est un espace vectoriel :

- $E_6 \subset \mathbb{R}^3$ qui est un espace vectoriel.
- Le vecteur nul, $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, vérifie $x + y + z = 0 + 0 + 0 = 0$ et c'est bien un élément de E_6 .
- Soient (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) des éléments de E_6 (donc vérifiant $x_1 + y_1 + z_1 = 0$ et $x_2 + y_2 + z_2 = 0$), montrons que $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in E_6$:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \quad \text{et} \quad (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = x_1 + y_1 + z_1 + x_2 + y_2 + z_2 = 0$$

donc $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in E_6$, qui est donc stable par somme.

- Soit (x, y, z) un élément de E_6 (donc $x + y + z = 0$) et λ un réel, montrons que $(\lambda(x, y, z)) \in E_6$:

$$\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \quad \text{et} \quad (\lambda x) + (\lambda y) + (\lambda z) = \lambda(x + y + z) = \lambda \times 0 = 0$$

donc $(\lambda(x, y, z)) \in E_6$, qui est donc stable par produit par un réel.

On en déduit finalement que E_6 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, donc un espace vectoriel.

Pour l'expliciter, on résout l'équation qui le caractérise : on prend un élément quelconque de $\mathbb{R}^3$, (x, y, z) et on écrit :

$$(x, y, z) \in E_6 \iff x + y + z = 0 \iff x = -y - z \iff (x, y, z) = (-y - z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$$

On en déduit que :

$$E_6 = \{y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1), \text{ tq } y, z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}[(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)].$$

La famille $[(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)]$ est donc génératrice de E_6 . De plus elle est constituée de deux vecteurs qui ne sont pas colinéaires, c'est donc une base de E_6 et

$$\dim(E_6) = \text{Card}[(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)] = 2.$$

Exercice 3. : espaces explicites

Tous les espaces sont sous formes explicites : pour prouver que ce sont des espaces vectoriels, on les écrit comme espaces engendrés par une famille (qui est donc génératrice) : la méthode d'obtention d'une base est alors la même que précédemment, mais sans équation à résoudre car l'espace est déjà explicite.

1. On écrit :

$$E_1 = \{P = aX^3 + bX^2 - aX + b, \text{ tq } a, b \in \mathbb{R}\} = \{P = a(X^3 - X) + b(X^2 + 1), \text{ tq } a, b \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}[X^3 - X, X^2 + 1]$$

est l'espace vectoriel engendré par la famille $[X^3 - X, X^2 + 1]$ donc c'est un espace vectoriel, et cette famille en est génératrice. De plus elle est composée de deux vecteurs qui ne sont pas colinéaires donc elle est libre, c'est donc une base de E_1 et :

$$\dim(E_1) = \text{Card}[X^3 - X, X^2 + 1] = 2.$$

2. On écrit :

$$\begin{aligned} E_2 &= \left\{ M(a, bc) = \begin{pmatrix} a+2c & b-2c \\ -b+2c & a+2c \end{pmatrix}, \text{ tq } a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ M(a, bc) = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ tq } a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

est l'espace vectoriel engendré par la famille $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right]$ donc c'est un espace vectoriel, et cette famille en est génératrice. Testons sa liberté : comme la famille comporte 3 vecteurs, on résout le système :

$$\begin{aligned} a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 0 & \iff \begin{pmatrix} a+2c & b-2c \\ -b+2c & a+2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \iff \begin{cases} a + 2c = 0 \\ b - 2c = 0 \\ -b + 2c = 0 \\ a + 2c = 0 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} a + 2c = 0 \\ b - 2c = 0 \\ -b + 2c = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \\ & \iff \begin{cases} a + 2c = 0 \\ b - 2c = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ & \iff \begin{cases} a = -2c \\ b = 2c \end{cases} \end{aligned}$$

Il y a des solutions non nulles donc la famille n'est pas libre : il faut écrire un vecteur en fonction des autres pour le retirer de la famille génératrice ; on remarque que

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$E_2 = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

est engendré par la famille $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right]$. Or cette famille est composée de deux vecteurs qui ne sont pas colinéaires donc elle est libre, c'est donc une base de E_2 et :

$$\dim(E_2) = \text{Card} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] = 2.$$

3. On écrit :

$$\begin{aligned} E_3 &= \{(a + 3b + 4c + 2d, 2a - b + c - 3d, -a - 2b + c + 3d), \text{ tq } a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(1, 2, -1) + b(3, -1, -2) + c(4, 1, 1) + d(2, -3, 3), \text{ tq } a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}[(1, 2, -1), (3, -1, -2), (4, 1, 1), (2, -3, 3)] \end{aligned}$$

est l'espace vectoriel engendré par la famille $[(1, 2, -1), (3, -1, -2), (4, 1, 1), (2, -3, 3)]$ donc c'est un espace vectoriel, et cette famille en est génératrice.

On remarque qu'avec 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, cette famille ne peut pas être libre, il faut donc écrire un vecteur en fonction des autres. Il n'y a rien d'évident, donc on va résoudre le système pour la liberté, ce qui nous permettra d'écrire un des vecteurs en fonction des autres :

$$\begin{aligned} a(1, 2, -1) + b(3, -1, -2) + c(4, 1, 1) + d(2, -3, 3) = 0 &\iff \begin{cases} a + 3b + 4c + 2d = 0 \\ 2a - b + c - 3d = 0 \\ -a - 2b + c + 3d = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} a + 3b + 4c + 2d = 0 \\ -7b - 7c - 7d = 0 \\ b + 5c + 5d = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{matrix} L_3 \leftarrow 7L_3 + L_2 \end{matrix} \begin{cases} a + 3b + 4c + 2d = 0 \\ -7b - 7c - 7d = 0 \\ 28c + 28d = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 2d \\ b = 0 \\ c = -d \end{cases} \end{aligned}$$

En posant $d = 1$, on obtient une solution $(a = 2, b = 0, c = -1, d = 1)$ qui permet d'écrire que :

$$2(1, 2, -1) - (4, 1, 1) + (2, -3, 3) = 0 \iff (2, -3, 3) = -2(1, 2, -1) + (4, 1, 1)$$

et donc

$$E_3 = \text{Vect}[(1, 2, -1), (3, -1, -2), (4, 1, 1), (2, -3, 3)] = \text{Vect}[(1, 2, -1), (3, -1, -2), (4, 1, 1)]$$

Cette nouvelle famille génératrice comporte trois vecteurs, il faut refaire un teste de liberté par le calcul : on s'appuie sur le système résolu précédemment dont on "retire" la partie avec $d(2, -3, 3)$:

$$\begin{aligned} a(1, 2, -1) + b(3, -1, -2) + c(4, 1, 1) = 0 &\iff \begin{cases} a + 3b + 4c = 0 \\ 2a - b + c = 0 \\ -a - 2b + c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} a + 3b + 4c = 0 \\ -7b - 7c = 0 \\ b + 5c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{matrix} L_3 \leftarrow 7L_3 + L_2 \end{matrix} \begin{cases} a + 3b + 4c = 0 \\ -7b - 7c = 0 \\ 28c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

donc la famille est libre et génératrice de E_3 , c'en est donc une base et :

$$\dim(E_3) = \text{Card}[(1, 2, -1), (3, -1, -2), (4, 1, 1)] = 3.$$

(Remarque : comme E_3 est inclus dans $\mathbb{R}^3$ et $\dim E_3 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, on peut en conclure que $E_3 = \mathbb{R}^3$, et donc en donner une base beaucoup plus simple : la base canonique de $\mathbb{R}^3$).

Exercice 4.

1. On remarque que $\text{Card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{R}^4) = 4$ donc il suffit de prouver la liberté de $\mathcal{B}$: avec 4 vecteurs, on résout le système :

$$\begin{aligned}
 av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4 = 0 & \iff \begin{cases} a & -c + d = 0 \\ 2a + b + c - d = 0 \\ 3a - b & + 2d = 0 \\ 4a + b + 2c & = 0 \end{cases} \\
 & \iff \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1 \end{matrix} \begin{cases} a & -c + d = 0 \\ b + 3c - 3d = 0 \\ -b + 3c - d = 0 \\ b + 6c - 4d = 0 \end{cases} \\
 & \iff \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{matrix} \begin{cases} a & -c + d = 0 \\ b + 3c - 3d = 0 \\ 6c - 4d = 0 \\ 3c - d = 0 \end{cases} \\
 & \iff \begin{matrix} L_4 \leftarrow 2L_4 - L_3 \end{matrix} \begin{cases} a & -c + d = 0 \\ b + 3c - 3d = 0 \\ 6c - 4d = 0 \\ 2d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

donc la famille $\mathcal{B}$ est libre, et $\text{Card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{R}^4)$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Pour déterminer les coordonnées de u , on résout le système, avec les mêmes pivots que le précédent :

$$\begin{aligned}
 av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4 = u & \iff \begin{cases} a & -c + d = 1 \\ 2a + b + c - d = 1 \\ 3a - b & + 2d = 1 \\ 4a + b + 2c & = 1 \end{cases} \\
 & \iff \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1 \end{matrix} \begin{cases} a & -c + d = 1 \\ b + 3c - 3d = -1 \\ -b + 3c - d = -2 \\ b + 6c - 4d = -3 \end{cases} \\
 & \iff \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{matrix} \begin{cases} a & -c + d = 1 \\ b + 3c - 3d = -1 \\ 6c - 4d = -3 \\ 3c - d = -2 \end{cases} \\
 & \iff \begin{matrix} L_4 \leftarrow 2L_4 - L_3 \end{matrix} \begin{cases} a & -c + d = 1 \\ b + 3c - 3d = -1 \\ 6c - 4d = -3 \\ 2d = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2/3 \\ b = 0 \\ c = -5/6 \\ d = -1/2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

et on obtient finalement :

$$u = 2/3v_1 + 0v_2 - 5/6v_3 - 1/2v_4.$$

2. Cette famille a bien un cardinal égal à la dimension de $\mathbb{R}^4$, donc il suffit de s'intéresser à sa liberté :

on résout le système :

$$\begin{aligned}
 au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 = 0 & \iff \begin{cases} a + 2b + c + 4d = 0 \\ -a + b + 2c + 2d = 0 \\ 2a - b + c + 2d = 0 \\ a + b - c + d = 0 \end{cases} \\
 & \iff \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} a + 2b + c + 4d = 0 \\ 3b + 3c + 6d = 0 \\ -5b - c - 6d = 0 \\ -b - 2c - 3d = 0 \end{cases} \\
 & \iff \begin{matrix} L_3 \leftarrow 3L_3 + 5L_2 \\ L_4 \leftarrow 3L_4 + L_2 \end{matrix} \begin{cases} a + 2b + c + 4d = 0 \\ 3b + 3c + 6d = 0 \\ 12c + 12d = 0 \\ -3c - 3d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -d \\ b = -d \\ c = -d \end{cases}
 \end{aligned}$$

Il y a des solutions non nulles donc la famille n'est pas libre. De plus on remarque qu'en posant $d = 1$, $a = b = c = -1$, on a une solution du système donc :

$$-u_1 - u_2 - u_3 + u_4 = 0 \iff u_4 = u_1 + u_2 + u_3 \in \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$$

ce qui permet d'écrire que :

$$\text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$$

On en déduit que la famille (u_1, u_2, u_3) est génératrice de $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$, on teste sa liberté :

$$\begin{aligned}
 au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 & \iff \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ -a + b + 2c = 0 \\ 2a - b + c = 0 \\ a + b - c = 0 \end{cases} \\
 & \iff \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ 3b + 3c = 0 \\ -5b - c = 0 \\ -b - 2c = 0 \end{cases} \\
 & \iff \begin{matrix} L_3 \leftarrow 3L_3 + 5L_2 \\ L_4 \leftarrow 3L_4 + L_2 \end{matrix} \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ 3b + 3c = 0 \\ 12c = 0 \\ -3c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

donc cette famille est libre et génératrice de $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$, c'en est une base et :

$$rg(u_1, u_2, u_3, u_4) = \dim[\text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)] = \text{Card}(u_1, u_2, u_3) = 3.$$

Exercice 5.

1. Comme E possède une base à trois éléments, on sait que $\dim(E) = 3$. On en déduit que $\text{Card}(u, v, w) = \dim(E)$, il suffit donc de prouver sa liberté. On résout donc :

$$au + bv + cw = 0 \iff a(i + k) + b(i - 2j) + c(j - k) = 0$$

Dans un espace vectoriel quelconque, pour pouvoir identifier et écrire des systèmes, il faut écrire les équations selon une base :

$$au + bv + cw = 0 \iff (a + b)i + (-2b + c)j + (a - c)k = 0$$

et comme (i, j, k) est une base de E , elle est libre donc la seule écriture de 0 est $0i + 0j + 0k = 0$,

donc :

$$\begin{aligned}
 au + bv + cw = 0 & \iff \begin{cases} a + b = 0 \\ -2b + c = 0 \\ a - c = 0 \end{cases} \\
 & \iff L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \begin{cases} a + b = 0 \\ -2b + c = 0 \\ -b - c = 0 \end{cases} \\
 & \iff L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \begin{cases} a + b = 0 \\ -2b + c = 0 \\ -3c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

donc la famille (u, v, w) est libre et $\text{Card}(u, v, w) = \dim(E) = 3$, donc (u, v, w) est une base de E .

2. Dans la base $\mathcal{B}$, u s'écrit $u = i + 0j + k$ donc la matrice de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De même avec $v = i - 2j + 0k$ et $w = 0i + j - k$ on obtient :

$$P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Comme $\mathcal{B}$ est une base, on sait que $\mathcal{B}'$ est une base si et seulement si $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ est inversible, ce qu'on vérifie en cherchant une réduite triangulaire :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \iff L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \iff L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Cette réduite triangulaire n'a aucun 0 sur sa diagonale donc P est inversible, et $\mathcal{B}'$ est bien une base de E .

3. $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ est l'inverse de $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = P$, qu'on calcule par la méthode de Gauss :

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \iff L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 & \iff L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -1 & 2 \end{array} \right) \\
 & \iff L_2 \leftarrow 3L_2 + L_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -1 & 2 \end{array} \right) \\
 & \iff L_1 \leftarrow 6L_1 + L_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -1 & 2 \end{array} \right) \\
 & \iff \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 1/6L_1 \\ L_2 \leftarrow -1/6L_2 \\ L_3 \leftarrow -1/3L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

donc P est inversible (on le savait déjà) et :

$$P^{-1} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

en lisant les coordonnées sur la base $\mathcal{B}'$, on en déduit que :

$$i = 2/3u + 1/3v + 2/3w \quad , \quad j = 1/3u - 1/3v + 1/3w \quad , \quad k = 1/3u - 1/3v - 2/3w.$$

Exercice 6.

w appartient à $\text{Vect}(u, v)$ si et seulement si il est combinaison linéaire de u et v , donc si et seulement si l'équation suivante **a des solutions** :

$$\begin{aligned} w = au + bv &\iff (1, 0, m) = a(-1, 1, 2) + b(2, 3, -1) \iff \begin{cases} -a + 2b = 1 \\ a + 3b = 0 \\ 2a - b = m \end{cases} \\ &\iff \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{matrix} \begin{cases} -a + 2b = 1 \\ 5b = 1 \\ 3b = m + 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -3/5 \\ b = 1/5 \\ b = 1/3(m + 2) \end{cases} \end{aligned}$$

qui a des solutions si et seulement si

$$1/3(m + 2) = 1/5 \iff m = -7/5.$$

La famille (u, v) est libre (2 vecteurs non colinéaires) donc :

• Si $m = -7/5$, $rg(u, v, w) = \dim(\text{Vect}(u, v, w)) = \dim(\text{Vect}(u, v)) = 2$

• Sinon, la famille (u, v, w) est libre donc $rg(u, v, w) = \dim(\text{Vect}(u, v, w)) = 3$.

On remarque d'ailleurs que $\text{Vect}(u, v, w) = \mathbb{R}^3$: car sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ + de même dimension que $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7.

Cette famille est de cardinal 2, égal à la dimension de $\mathbb{R}^2$, il suffit d'étudier sa liberté :

$$\begin{aligned} \lambda(2a, a - 1) + \mu(a - 3, a + 1) = 0 &\iff \begin{cases} 2a\lambda + (a - 3)\mu = 0 \\ (a - 1)\lambda + (a + 1)\mu = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{matrix} L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} 2a\lambda + (a - 3)\mu = 0 \\ -2\lambda + (a + 5)\mu = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \end{matrix} \begin{cases} -2\lambda + (a + 5)\mu = 0 \\ 2a\lambda + (a - 3)\mu = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + aL_1 \end{matrix} \begin{cases} -2\lambda + (a + 5)\mu = 0 \\ (-3 + 6a + a^2)\mu = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La famille est libre si et seulement si la seule solution du système est $\lambda = \mu = 0$, ce qui n'est le cas que si le coefficient $(-3 + 6a + a^2)$ est non nul. On résout donc $-3 + 6a + a^2 = 0$ dont le discriminant puis les racines valent :

$$\Delta = 36 + 12 = 48 \quad , \quad x_1 = \frac{-6 - \sqrt{48}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{-6 + \sqrt{48}}{2}.$$

Pour $a \in \{x_1; x_2\}$, la famille n'est pas libre, ce n'est donc pas une base de $\mathbb{R}^2$.

Pour $a \notin \{x_1; x_2\}$, la famille est libre et $\text{Card}[(2a, a - 1), (a - 3, a + 1)] = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$, donc c'est une base de $\mathbb{R}^2$.

Dans cette base, cherchons les coordonnées de $(a, a + 1)$:

$$\begin{aligned} \lambda(2a, a - 1) + \mu(a - 3, a + 1) &= (a, a + 1) \iff \begin{cases} 2a\lambda + (a - 3)\mu = a \\ (a - 1)\lambda + (a + 1)\mu = a + 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{matrix} L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} 2a\lambda + (a - 3)\mu = a \\ -2\lambda + (a + 5)\mu = a + 2 \end{cases} \\ &\iff \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \end{matrix} \begin{cases} -2\lambda + (a + 5)\mu = a + 2 \\ 2a\lambda + (a - 3)\mu = a \end{cases} \\ &\iff \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + aL_1 \end{matrix} \begin{cases} -2\lambda + (a + 5)\mu = a + 2 \\ (-3 + 6a + a^2)\mu = 3a + a^2 \end{cases} \\ &\iff \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + aL_1 \end{matrix} \begin{cases} -2\lambda + (a + 5)\mu = a + 2 \\ \mu = \frac{3a + a^2}{-3 + 6a + a^2} = \frac{a(3 + a)}{-3 + 6a + a^2} \end{cases} \end{aligned}$$

et enfin :

$$-2\lambda = a + 2 - \frac{a(a+5)(3+a)}{-3+6a+a^2} \iff \lambda = -\frac{a}{2} - 1 + \frac{a(a+5)(3+a)}{-3+6a+a^2}.$$

Exercice 8.

1. La base canonique de E est la famille (e_0, e_1, e_2, e_3) telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $i \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$, on a :

$$e_i(x) = x^i.$$

Ecrivons la famille $\mathcal{C}$ sur cette base :

$$P_0(X) = 1 + 3X + 3X^2 + X^3 \quad \text{donc} \quad P_0 = e_0 + 3e_1 + 3e_2 + e_3,$$

$$P_1(X) = X(1 + 2X + X^2) = X + 2X^2 + X^3 \quad \text{donc} \quad P_1 = e_1 + 2e_2 + e_3,$$

$$P_2(X) = X^2 + X^3 \quad \text{donc} \quad P_2 = e_2 + e_3 \quad \text{et} \quad P_3(X) = X^3 \quad \text{donc} \quad P_3 = e_3$$

ce qui donne :

$$Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. — Avec la matrice précédente : cette matrice est triangulaire sans 0 sur la diagonale donc elle est inversible ; comme $\mathcal{B}$ est une base de E et $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ est inversible, on en déduit que $\mathcal{C}$ est une base de E .

- Avec la liberté : on remarque que $\text{Card}(\mathcal{C}) = \dim(E) = 4$, il suffit de prouver la liberté. On résout :

$$aP_0 + bP_1 + cP_2 + dP_3 = 0 \iff a(e_0 + 3e_1 + 3e_2 + e_3) + b(e_1 + 2e_2 + e_3) + c(e_2 + e_3) + de_3 = 0$$

$$\iff ae_0 + (3a + b)e_1 + (3a + 2b + c)e_2 + (a + b + c + d)e_3 = 0$$

$$\iff \begin{cases} a = 0 \\ 3a + b = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ a + b + c + d = 0 \end{cases} \iff a = b = c = d = 0$$

donc la famille $\mathcal{C}$ est libre et $\text{Card}(\mathcal{C}) = \dim(E)$, donc $\mathcal{C}$ est une base de E .

3. La matrice $P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}$ est l'inverse de $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ déterminé à la première question : on utilise la méthode de Gauss.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \iff \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \iff \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \iff \begin{array}{l} L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

donc on obtient :

$$(P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}})^{-1} = P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. On obtient immédiatement les coordonnées de Q dans la base $\mathcal{B}$:

$$Q = 3e_3 + e_2 - 2e_1 + e_0$$

Or la matrice $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ nous permet de lire les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{C}$, on peut donc remplacer :

$$Q = 3P_3 + (P_2 - P_3) - 2(P_1 - 2P_2 + P_3) + (P_0 - 3P_1 + 3P_2 - P_3) = P_0 - 5P_1 + 8P_2 - P_3.$$

On pouvait aussi utiliser la formule de changement de base :

$$Mat_{\mathcal{C}}(Q) = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} Mat_{\mathcal{B}}(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donc $Q = P_0 - 5P_1 + 8P_2 - P_3$.

Exercice 9.

Pour montrer l'égalité de deux espaces vectoriels, on peut :

- soit prouver deux inclusions (méthode générale pour tous les ensembles, espaces vectoriels ou non).
- soit prouver une inclusion et l'égalité des dimensions.

Ici les espaces sont explicites donc les dimensions sont faciles à trouver, on utilise la deuxième méthode : posons $E = \text{Vect}(u, v)$ et $E' = \text{Vect}(u', v')$, on a :

- la famille (u, v) est génératrice de E , et elle est composée deux vecteurs qui ne sont pas colinéaires, donc elle est libre. C'est donc une base de E et $\dim(E) = 2$.
- la famille (u', v') est génératrice de E' , et elle est composée deux vecteurs qui ne sont pas colinéaires, donc elle est libre. C'est donc une base de E' et $\dim(E') = 2$.

Les dimensions sont égales, on va donc prouver une inclusion : pour cela, on va montrer que E' est inclus dans E : par stabilité par combinaison linéaire, comme (u', v') est une base de E' , il faut et il suffit de prouver que $u' \in E$ et $v' \in E$.

- Par définition de l'espace vectoriel engendré, $E = \text{Vect}(u, v) = \{au + bv, \text{ tq } a, b \in \mathbb{R}\}$ donc u' appartient à E si et seulement si on peut l'écrire sous la forme $u' = au + bv$. Ici on peut la trouver à vue, ou bien résoudre le système ; on trouve :

$$u' = 2u - v \in \text{Vect}(u, v) = E.$$

- De même v' appartient à E si et seulement si on peut l'écrire sous la forme $v' = au + bv$. De nouveau on peut la trouver à vue, ou bien résoudre le système ; on trouve :

$$v' = u + 3v \in \text{Vect}(u, v) = E.$$

Par stabilité des espaces vectoriels par combinaison linéaire, on en déduit que :

$$E' = \text{Vect}(u', v') \subset E \quad \text{et} \quad \dim(E) = \dim(E') \quad \text{donc} \quad E = E'$$

Exercice 10.

1. Montrons que D_2 est un sous-espace vectoriel de l'ensemble F des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$:

- De manière évidente, $D_2 \subset F$ (toute fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$).
- La fonction nulle $f = 0$, vérifie $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$ est deux fois dérivable, de dérivées successives $f' = 0$ et $f'' = 0$, donc elle appartient bien à D_2 .
- Soient f_1 et f_2 deux fonctions de D_2 , donc deux fois dérivables. Alors par linéarité de la dérivabilité, $(f_1 + f_2)$ est également deux fois dérivable, donc $(f_1 + f_2) \in D_2$ qui est stable par somme.
- Soit f une fonction de D_2 , donc deux fois dérivable, et λ un réel. Alors par linéarité de la dérivabilité, (λf) est également deux fois dérivable, donc $(\lambda f) \in D_2$ qui est stable par produit par un réel.

On en déduit que D_2 est un sous-espace vectoriel de F , donc c'est un espace vectoriel.

2. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble D_2 :

- De manière évidente, $F \subset D_2$.
- La fonction nulle $f = 0$, vérifie $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$ est deux fois dérivable, de dérivées successives $f' = 0$ et $f'' = 0$, donc

$$f'' = 0 \quad \text{et} \quad 2f' - f = 0 \quad \text{donc} \quad f'' = 2f' - f$$

et la fonction nulle est bien élément de E .

- Soient f_1 et f_2 deux fonctions de E , donc deux fois dérivables et vérifiant $f_1''' = 2f_1' - f_1$ et $f_2''' = 2f_2' - f_2$. Alors par linéarité de la dérivabilité,

$$(f_1 + f_2)'' = f_1'' + f_2'' = 2f_1' - f_1 + 2f_2' - f_2 = 2(f_1' + f_2') - (f_1 + f_2) = 2(f_1 + f_2)' - (f_1 + f_2)$$

donc $(f_1 + f_2) \in E$ qui est stable par somme.

- Soit f une fonction de E , donc deux fois dérivable et vérifiant $f''' = 2f' - f$, et λ un réel. Alors par linéarité de la dérivabilité,

$$(\lambda f)'' = \lambda f'' = \lambda(2f' - f) = 2\lambda f' - \lambda f = 2(\lambda f)' - (\lambda f)$$

donc $(\lambda f) \in E$ qui est stable par produit par un réel.

On en déduit que E est un sous-espace vectoriel de D_2 .

3. Montrons tout d'abord que f_1 et f_2 sont dans E : f_1 est deux fois dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_1'(x) = e^x \quad , \quad f_1''(x) = e^x \quad \text{et} \quad 2f_1'(x) - f_1(x) = 2e^x - e^x = e^x = f_1''(x)$$

donc $f_1 \in E$. De même f_2 est deux fois dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_2'(x) = xe^x + e^x \quad , \quad f_2''(x) = xe^x + e^x + e^x = xe^x + 2e^x \quad \text{et} \quad 2f_2'(x) - f_2(x) = 2xe^x + 2e^x - xe^x = xe^x + 2e^x = f_2''(x)$$

donc $f_2 \in E$.

Montrons à présent que la famille (f_1, f_2) est libre : on résout l'équation suivante, sur des fonctions, **ce qui équivaut à avoir l'égalité pour tout x réel** :

$$af_1 + bf_2 = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}, ae^x + bxe^x = 0.$$

Comme il y a deux inconnues, on veut un système de deux équations : pour cela on prend deux valeurs de x , par exemple $x = 0$ et $x = 1$:

$$af_1 + bf_2 = 0 \implies \begin{cases} ae^0 + b \times 0e^0 = 0 \\ ae^1 + b \times 1e^1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 0 \\ ae + be = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

et la famille est bien libre.

4. Calculons h'' : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$h'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} \quad \text{puis} \quad h''(x) = f''(x)e^{-x} - f'(x)e^{-x} - [f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x}] = [f''(x) - 2f'(x) + f(x)]e^{-x}$$

Or f est élément de E , donc $f''(x) = 2f'(x) - f(x)$, ce qui donne enfin :

$$h''(x) = [2f'(x) - f(x) - 2f'(x) + f(x)]e^{-x} = 0e^{-x} = e^{-x}.$$

On en déduit que h' est une primitive de la fonction nulle (puisque sa dérivée est la fonction nulle), donc c'est une constante :

$$\exists a \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = a.$$

Ensuite on en déduit que h est une primitive de la fonction $x \mapsto a$ (puisque sa dérivée est a), donc :

$$\exists a, b \in \mathbb{R}, \quad h(x) = ax + b.$$

Enfin on renverse la relation entre f et h :

$$h(x) = f(x)e^{-x} \quad \text{donc} \quad f(x) = \frac{h(x)}{e^{-x}} = h(x)e^x = (ax + b)e^x = axe^x + be^x = af_2(x) + bf_1(x).$$

On a prouvé dans la question 2 que f_1 et f_2 sont dans E , donc par stabilité par combinaison linéaire des espaces vectoriels :

$$\text{Vect}(f_1, f_2) \subset E.$$

D'autre part à la question 4, on a pris une fonction quelconque de E , et on a montré qu'elle est combinaison linéaire de f_1 et f_2 , donc élément de $\text{Vect}(f_1, f_2)$: on en déduit que :

$$E \subset \text{Vect}(f_1, f_2) \quad \text{et donc} \quad E = \text{Vect}(f_1, f_2).$$

La famille (f_1, f_2) est donc génératrice de E , et libre d'après la question 3, donc c'est une base de E et enfin :

$$\dim(E) = \text{Card}(f_1, f_2) = 2.$$

Exercice 11.

1. Soit $(q_n) = (aq^n)$ une suite géométrique : on calcule :

$$u_{n+2} = aq^{n+2} \quad \text{et} \quad -u_{n+1} + 6u_n = -aq^{n+1} + 6aq^n = aq^n(6 - q).$$

On en déduit que $(q_n) \in E$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad q^{n+2} = q^n(6-q) \iff \forall n \in \mathbb{N} q^n(q^2+q-6) \iff \forall n \in \mathbb{N}, [a = 0 \quad \text{ou} \quad q^n = 0 \quad \text{ou} \quad q^2+q-6 = 0].$$

Comme $q^n = 0$ ne peut être valable en $n = 0$ (cela donne $1=0$), il faut et il suffit donc que $a = 0$ (qui donne la suite nulle) ou bien $q^2 + q - 6 = 0$, et on calcule son discriminant et ses racines :

$$\Delta = 1 + 24 = 25 \quad , \quad q_1 = \frac{-1-5}{2} = -3 \quad , \quad q_2 = \frac{-1+5}{2} = 2.$$

On en déduit que les suites géométriques E sont, avec a et b constantes réelles quelconques :

$$q_n = 0 \quad , \quad q_n = a(-3)^n \quad , \quad q_n = b \times 2^n.$$

Enfin la suite nulle est comprise dans les deux autres cas (pour $a = 0$ et pour $b = 0$) donc les solutions sont :

$$q_n = a(-3)^n \quad , \quad q_n = b \times 2^n.$$

2. Montrons que E est un sev de S :

— De manière évidente, $E \subset S$.

- La suite nulle vérifie $u_n = 0$ pour tout n , donc pour tout n :

$$u_{n+2} = 0 \quad \text{et} \quad -u_{n+1} + 6u_n = -0 + 6 \times 0 = 0 \quad \text{donc} \quad u_{n+2} = -u_{n+1} + 6u_n$$

et elle est bien élément de E .

- Soient u et v deux suites de E donc vérifiant la relation de récurrence, montrons que $(u+v) \in E$: pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u+v)_{n+2} = u_{n+2} + v_{n+2} = -u_{n+1} + 6u_n - v_{n+1} + 6v_n = -(u+v)_{n+1} + 6(u+v)_n$$

donc $(u+v) \in E$, qui est stable par somme.

- Soit u une suite de E donc vérifiant la relation de récurrence, et λ un réel, montrons que $(\lambda u) \in E$: pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(\lambda u)_{n+2} = \lambda u_{n+2} = \lambda(-u_{n+1} + 6u_n) = -\lambda u_{n+1} + 6\lambda u_n = -(\lambda u)_{n+1} + 6(\lambda u)_n$$

donc $(\lambda u) \in E$, qui est stable par produit par un réel.

On en déduit que E est un sev de S .

3. (a) On résout ce système :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = u_0 \\ -3\alpha + 2\beta = u_1 \end{cases} \iff L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \quad \begin{cases} \alpha + \beta = u_0 \\ 5\beta = u_1 + 3u_0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{-u_1 + 2u_0}{5} \\ \beta = \frac{u_1 + 3u_0}{5} \end{cases}$$

- (b) Comme (u_n) , $((-3)^n)$ et (2^n) sont des suites de E (question 1 et hypothèse de la question 3) et que E est un espace vectoriel (question 2) donc est stable par combinaison linéaire, la suite $(v_n) = (u_n) - \alpha((-3)^n) - \beta(2^n)$ est aussi élément de E .

(Remarque : on peut aussi le prouver par le calcul en revenant à la relation de récurrence, qu'on prouve sur v).

Calculons v_0 et v_1 :

$$v_0 = u_0 - \alpha - \beta = u_0 - (\alpha + \beta) = u_0 - u_0 = 0$$

car (α, β) est solution du système de la question a). De même :

$$v_1 = u_1 + 3\alpha - 2\beta = u_1 - (-3\alpha + 2\beta) = u_1 - u_1 = 0.$$

Montrons alors par récurrence double sur n que pour tout $n \geq 0$, $v_n = 0$.

- **Initialisations** : Pour $n = 0$ et pour $n = 1$, on a bien $v_0 = 0$ et $v_1 = 0$ donc la propriété est vraie aux rangs 0 et 1.

- **Hérédité** : supposons qu'il existe $n \geq 0$ fixé tel que $v_n = 0$ et $v_{n+1} = 0$, alors :

$$v_{n+2} = -v_{n+1} + 6v_n = -0 + 6 \times 0 = 0.$$

- **Conclusion** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 0$.

- (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on vient d'obtenir que :

$$v_n = u_n - \alpha(-3)^n - \beta 2^n = 0 \quad \text{donc} \quad u_n = \alpha(-3)^n + \beta 2^n.$$

- (d) On en déduit que $E = \text{Vect} [((-3)^n)_{n \in \mathbb{N}}, (2^n)_{n \in \mathbb{N}}]$ donc cette famille est génératrice de E . Montrons qu'elle est libre :

$$a((-3)^n)_{n \in \mathbb{N}} + b(2^n)_{n \in \mathbb{N}} = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}, a(-3)^n + b2^n = 0.$$

Pour résoudre cette équation à deux inconnues, il faut deux équations : prenons deux valeurs de n simples, 0 et 1 :

$$a((-3)^n)_{n \in \mathbb{N}} + b(2^n)_{n \in \mathbb{N}} = 0 \implies \begin{cases} a + b = 0 \\ -3a + 2b = 0 \end{cases} \implies (L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1) \begin{cases} a + b = 0 \\ 5b = 0 \end{cases} \implies a = b = 0$$

donc cette famille est libre, c'est une base de E . Enfin $\dim(E) = 2$.

Exercice 12.**1. intersection :**(a) Montrons que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E :— Par définition $F \cap G \subset F$, et $F \subset E$ d'après l'énoncé, donc $F \cap G \subset E$.— Soit $e = 0$ l'élément nul de E . Comme F et G sont des sev de E , $e \in F$ et $e \in G$. On en déduit que :

$$e \in F \cap G$$

— Soient a et b deux éléments de $F \cap G$, donc qui sont à la fois dans F et dans G .Alors $a \in F$ et $b \in F$, et F est un espace vectoriel donc stable par somme : d'où $(a+b) \in F$.De même $a \in G$ et $b \in G$, et G est un espace vectoriel donc stable par somme : d'où $(a+b) \in G$.On en déduit bien que $(a+b) \in F \cap G$, qui est stable par somme.— Soit a un élément de $F \cap G$ donc qui est à la fois dans F et dans G , et $\lambda \text{ un réel}$.Alors $a \in F$ (resp. G) qui est stable par produit par un réel car c'est un espace vectoriel, donc $(\lambda a) \in F$ (resp. G), et finalement $(\lambda a) \in F \cap G$, qui est stable par produit par un réel.On en déduit bien que $F \cap G$ est un sev de E , donc c'est un espace vectoriel.(b) i. • $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = x + 2y\}$ (ici, il y a 2 inconnues secondaires car système échelonné à 1 équation pour 3 inconnues)donc $F = \{(x, y, x+2y) | x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, 2) | x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 2))$. Ainsi, la famille $[(1, 0, 1), (0, 1, 2)]$ est génératrice de F (car F est l'espace vectoriel engendré par cette famille d'après l'égalité ci-dessus).De plus, cette famille est constituée de 2 vecteurs non colinéaires donc libres. Conclusion : $[(1, 0, 1), (0, 1, 2)]$ est une base de F .• $G = \{a(1, 1, 0) + b(0, 1, 1) | a, b \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$.Par le même raisonnement que ci-dessus, on prouve que la famille $[(1, 1, 0), (0, 1, 1)]$ est une base de G .ii. $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ appartient à G si et seulement s'il existe a et b réels tels que $a(1, 1, 0) +$

$$b(0, 1, 1) = (x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} a & = & x \\ a + b & = & y \\ b & = & z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = & x \\ b & = & z \\ x + z & = & y \end{cases}$$

Le système est compatible (admet des solutions a et b réels) si et seulement si $x + z = y \Leftrightarrow x - y + z = 0$.On obtient donc $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y + z = 0\}$.iii. $F \cap G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y - z = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y + z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}\}$

$$\text{On résout le système } \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 0 - 3y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/3z \\ y = 2/3z \end{cases}$$

Ainsi, $F \cap G = \text{Vect}((-1/3, 2/3, 1)) = \text{Vect}((-1, 2, 3))$. $(-1, 2, 3)$ est donc une famille génératrice de $F \cap G$ et libre car constituée d'un seul vecteur non nul donc c'est une base de $F \cap G$.**2. réunion**

(a) On teste une par une les propriétés :

— Comme $F \subset E$ et $G \subset E$, on a bien $F \cup G \subset E$.

- Soit $e = 0$ l'élément nul de E . Comme F et G sont des sev de E , $e \in F$ et $e \in G$, donc il est a fortiori dans l'un des deux au moins. On en déduit que :

$$e \in F \cup G$$

- Soient a et b deux éléments de $F \cup G$, donc qui sont soit dans F , soit dans G
Si $a \in F$ et $b \in F$, comme F est un espace vectoriel donc stable par somme : d'où $(a+b) \in F$.

De même si $a \in G$ et $b \in G$, comme G est un espace vectoriel donc stable par somme : d'où $(a+b) \in G$.

Si $a \in F$ et $b \in G$, on obtient :

$$a = (x, 0) \quad \text{et} \quad b = (0, y) \quad \text{donc} \quad a + b = (x, y)$$

qui n'est dans F que si $x = 0$ et dans G que si $y = 0$.

On peut donc prendre un contre-exemple en faisant en sorte que cela ne soit pas respecté :

$$(1, 0) \in F \subset F \cup G \quad \text{et} \quad (0, 1) \in G \subset F \cup G \quad \text{mais} \quad (1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \left\{ \begin{array}{l} \notin F \\ \notin G \end{array} \right. \quad \text{donc} \quad (1, 1) \notin F \cup G$$

Ce contre-exemple assure que $F \cup G$ n'est pas un espace vectoriel.

- (b) Dans le cas particulier précédent, on a vu que l'inclusion dans E et le fait que 0 soit élément de la réunion sont toujours vrais, car on n'a réalisé une preuve générale.

On a vu que la stabilité par somme peut poser problème.

Etudions la stabilité par produit par un réel :

Soit a un élément de $F \cup G$ donc qui est soit dans F uniquement, soit dans G uniquement, soit dans les deux, et λ un réel.

Si $a \in F$ (resp. G) qui est stable par produit par un réel car c'est un espace vectoriel, donc $(\lambda a) \in F$ (resp. G), et finalement $(\lambda a) \in F \cup G$, qui est stable par produit par un réel.

Comme a appartient forcément à F ou à G , ceci marche dans tous les cas.

Etudions à présent dans le cas général la stabilité par somme :

- Supposons que $F \subset G$ ou $G \subset F$: alors dans le premier cas $F \cup G = G$, dans le second $F \cup G = F$, et dans les deux cas c'est bien un espace vectoriel puisque F et G le sont.

- Supposons que la propriété

$$[(F \subset G) \quad \text{ou} \quad (G \subset F)]$$

est fausse, ce qui signifie que F n'est pas inclus dans G et que G n'est pas inclus dans F .

Or dire que G n'est pas inclus dans F signifie qu'il existe un élément de G qui n'est pas dans F , c'est-à-dire :

$$\exists a \in G \text{ tq } a \notin F \quad \text{et de même} \quad \exists b \in F \text{ tq } b \notin G.$$

Alors a et b sont éléments de $F \cup G$ puisque chacun est dans l'un des deux, mais leur somme $(a+b)$ n'y est pas : en effet, supposons que $(a+b) \in F \cup G$, alors :

- soit $(a+b) \in F$, auquel cas, par stabilité de F par combinaison linéaire,

$$(a+b) - b = a \in F \quad \text{ce qui est absurde.}$$

- soit $(a+b) \in G$, auquel cas, par stabilité de G par combinaison linéaire,

$$(a+b) - a = b \in G \quad \text{ce qui est absurde.}$$

On en déduit donc que si $[(F \subset G) \text{ ou } (G \subset F)]$ est faux, $F \cup G$ n'est pas un espace vectoriel.

Enfin on a montré que :

- si $[(F \subset G) \text{ ou } (G \subset F)]$ est vrai, la propriété : " $F \cup G$ est un espace vectoriel" est vraie.
 - si $[(F \subset G) \text{ ou } (G \subset F)]$ est faux, la propriété : " $F \cup G$ est un espace vectoriel" est fausse.
- donc ces deux propriétés sont bien équivalentes.

Exercice 13.

1. • Montrons que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E :

- Montrons que $F + G \subset E$:

soit $x \in F + G$, alors il existe $f \in F$ et $g \in G$ tels que $x = f + g$.

Or $f \in F \subset E$ et $g \in G \subset E$, donc par stabilité de E par somme, $x = f + g \in E$, et $F + G \subset E$.

- Soit $e = 0$ l'élément nul de E . Comme F et G sont des sev de E , $e \in F$ et $e \in G$. On en déduit que :

$$e = 0 = 0 + 0 \in F + G.$$

(le premier 0 est bien dans F , le second est bien dans G , donc on a bien la forme nécessaire pour être dans $F + G$).

- Soient a et b deux éléments de $F + G$, alors il existe f, f' dans F et g, g' dans G tels que

$$a = f + g \quad , \quad b = f' + g'$$

Alors on obtient :

$$a + b = f + g + f' + g' = (f + f') + (g + g')$$

avec $(f + f') \in F$ et $(g + g') \in G$ car F et G sont stables par somme.

On en déduit bien que $(a + b) \in F + G$, qui est stable par somme.

- Soit a un élément de $F + G$ et λ un réel, alors il existe f dans F et g dans G tels que

$$a = f + g$$

Alors on obtient :

$$\lambda a = \lambda(f + g) = (\lambda f) + (\lambda g)$$

avec $(\lambda f) \in F$ et $(\lambda g) \in G$ car F et G sont stables par produit par un réel.

On en déduit bien que $(\lambda a) \in F + G$, qui est stable par produit par un réel.

On en déduit bien que $F + G$ est un sev de E , donc c'est un espace vectoriel.

- Montrons que $F \subset F + G$ i.e. $\forall f \in F, f \in F + G$:

Soit $f \in F$ quelconque, alors $f = f + 0$ avec $f \in F$ et $0 \in G$ car G est un espace vectoriel, donc $f \in F + G$.

On a donc : tout élément $f \in F$ appartient à $F + G$: $F \subset F + G$.

De même, $\forall g \in G, g = 0 + g \in F + G$ donc $G \subset F + G$.

2. Soit E un espace vectoriel contenant F et G .

Alors soit u un vecteur quelconque de $F + G$. Par définition de $F + G$, il existe $f \in F$ et $g \in G$ tels que $x = f + g$.

Or $f \in F \subset E$ donc $f \in E$. De même $g \in G \subset E$ i.e. $G \subset E$ donc $f + g \in E$ par stabilité de E par somme.

Ainsi, on a prouvé : pour tout $x \in F + G$, x appartient à E i.e. : $F + G \subset E$.

3. Supposons $G \subset F$.

Pour montrer une égalité d'ensembles, on montre la double inclusion :

- $F \subset F + G$ d'après la question précédente ;
- Montrons : $F + G \subset F$:

Soit x quelconque dans $F + G$, par définition de $F + G$, il existe $f \in F$ et $g \in G$ tels que $x = f + g$. Mais $G \subset F$ donc comme $g \in G$ alors $g \in F$ donc $x = f + g \in F$ car F est un espace vectoriel donc stable par somme.

Ainsi, si $x \in F + G$ alors $x \in F$ i.e. $F \subset F + G$.

Conclusion : par double inclusion, on obtient $F = F + G$.

4. (a) On remarque, par définition d'un espace vectoriel engendré que $G = \{\mu(2, 1, 2, 1) + \gamma(3, 1, 4, 2) \mid \mu, \gamma \text{ réels}\}$.

$$\begin{aligned} F + G &= \{f + g \mid f \in F \text{ et } g \in G\} \\ &= \{\lambda(1, 0, 2, 1) + \mu(2, 1, 2, 1) + \gamma(3, 1, 4, 2) \mid \lambda, \mu, \gamma \text{ réels}\} \\ &= \text{Vect}((1, 0, 2, 1), (2, 1, 2, 1), (3, 1, 4, 2)) \end{aligned}$$

La famille $((1, 0, 2, 1), (1, 0, 2, 1), (3, 1, 4, 2))$ est génératrice de $F + G$. Vérifions sa liberté :

On remarque que $(3, 1, 4, 2) = (1, 0, 2, 1) + (1, 0, 2, 1)$ donc

$$\begin{aligned} F + G &= \text{Vect}((1, 0, 2, 1), (2, 1, 2, 1), (1, 0, 2, 1) + (1, 0, 2, 1)) \\ &= \text{Vect}((1, 0, 2, 1), (2, 1, 2, 1)) \end{aligned}$$

La famille $((1, 0, 2, 1), (2, 1, 2, 1))$ est donc génératrice de $F + G$. De plus, elle est libre car composée de 2 vecteurs non proportionnels donc c'est une base de $F + G$.

(b) Par le même procédé, on obtient que $(1, X, X^2, X^3, X^4)$ est une base de $F + G$.

5. (a) • **Existence de la décomposition :** $u \in F + G$ donc par définition de $F + G$, il existe $f \in F$ et $g \in G$ tels que $x = f + g$.

• **Unicité de la décomposition :** Supposons qu'il existe $(f_1, g_1) \in F + G$ et $(f_2, g_2) \in F + G$ tels que $u = f_1 + g_1 = f_2 + g_2$

Alors $f_1 - f_2 = g_2 - g_1$ or $f_1 - f_2 \in F$ par stabilité de F par combinaisons linéaires ; De même, $g_2 - g_1 \in G$ par stabilité de G par combinaisons linéaires.

Donc $f_1 - f_2 = g_2 - g_1 \in F \cap G = \{0\}$ donc $f_1 - f_2 = 0$ i.e. $f_1 = f_2$ et $g_2 - g_1 = 0$ i.e. $g_2 = g_1$. Il y a donc bien unicité de la décomposition de u .

(b) • Montrons que cette famille est génératrice de $F + G$:

Soit $u \in F + G$ alors il existe $f \in F$ et $g \in G$ tels que $u = f + g$.

Or $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est une base de F donc il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n$.

De même, $(g_1, g_2, \dots, g_p)$ est une base de G donc il existe $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ tels que $g = \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 + \dots + \mu_p g_p$.

Ainsi, $u = f + g = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n + \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 + \dots + \mu_p g_p$.

Tout vecteur u de $F + G$ s'écrit comme combinaison linéaire de cette famille donc cette famille est bien génératrice de $F + G$.

• Montrons que cette famille est libre :

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ des réels tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n + \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 + \dots + \mu_p g_p = 0$. On remarque qu'alors $0 = f + g$ où $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n \in F$ (par stabilité de F par combinaisons linéaires) et $g = \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 + \dots + \mu_p g_p \in G$. Mais 0 se décompose aussi comme $0 = 0 + 0$ avec $0 \in F$ et $0 \in G$.

Par unicité de la décomposition de 0 dans $F + G$ (d'après la question précédente), on a donc : $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n = 0$ et $\mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 + \dots + \mu_p g_p = 0$.

Par liberté de la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ on obtient donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ et par liberté de $(g_1, g_2, \dots, g_p)$ on obtient $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_p = 0$.

La famille de départ est donc libre.

(c) $(f_1, f_2, \dots, f_n, g_1, g_2, \dots, g_p)$ est une base de $F + G$ donc $\dim(F + G) = \text{card}(f_1, f_2, \dots, f_n, g_1, g_2, \dots, g_p) = n + p = \dim(F) + \dim(G)$.

6. — — Montrons la première implication (de la gauche vers la droite) : on suppose que $[A \cap B = A + B]$, alors on a par définition de l'inclusion et de la somme :

$$A \cap B \subset A \subset A + B \quad \text{et} \quad A \cap B \subset B \subset A + B$$

Par égalité des membres extrémaux, on obtient :

$$A = A \cap B = A + B \quad \text{et} \quad B = A \cap B = A + b \quad \text{et donc} \quad A = B.$$

— Montrons la deuxième implication : on suppose que $[A = B]$, alors $A \cap B = A \cap A = A$ et

$$A \subset (A + B) = (A + A) = \{a + b; a, b \in A\} \subset A \quad \text{donc} \quad A + B = A =$$

et enfin on obtient bien $(A \cap B) = (A + B)$.

On a bien obtenu l'équivalence :

$$[(A \cap B) = (A + B)] \iff [A = B].$$

— Montrons cette inclusion. Pour cela, soit $x \in [(A \cap B) + (A \cap C)]$, alors :

il existe $f \in (A \cap B)$, donc $f \in F$ et $f \in G$, et $g \in (A \cap C)$ donc $g \in A$ et $g \in C$ tels que :

$$x = f + g$$

On veut montrer que $x \in A \cap (B + C)$, il faut donc montrer qu'il est dans les deux :

— $x = f + g$ avec $f \in A$ et $g \in A$ donc par stabilité de A par somme, $x \in A$.

— $x = f + g$ avec $f \in B$ et $g \in C$ donc par définition, $x \in (B + C)$.

On en déduit bien que $x \in A \cap (B + C)$, et donc l'inclusion :

$$[(A \cap B) + (A \cap C)] \subset [A \cap (B + C)].$$

— Soit $x \in [A + (B \cap C)]$, alors il existe $f \in A$ et $g \in (B \cap C)$, donc $g \in B$ et $g \in C$, tels que :

$$x = f + g.$$

On veut montrer que $x \in [(A + B) \cap (A + C)]$, donc qu'il est dans les deux :

— $x = f + g$ avec $f \in A$ et $g \in B$ donc par définition de la somme, $x \in (A + B)$.

— $x = f + g$ avec $f \in A$ et $g \in C$ donc par définition de la somme, $x \in (A + C)$.

On en déduit donc que $x \in [(A + B) \cap (A + C)]$, et enfin l'inclusion :

$$[A + (B \cap C)] \subset [(A + B) \cap (A + C)].$$