

# Td de révisions : probabilités discrètes

## I. Révisions de variables aléatoires discrètes

**Exercice 1.** On lance un dé à quatre faces numérotées de 1 à 4.

La probabilité de chacune des faces est proportionnelle au numéro qu'elle porte.

On note  $X$  le nombre obtenu.

1. Déterminer la loi de  $X$ .
2. Donner l'espérance de  $X$ .
3. Calculer la variance de  $X$ .
4. On pose  $Y = \frac{1}{X}$ .  
Déterminer  $E(Y)$ .
5. On pose  $Z = 2X + 3$ .  
Déterminer  $E(Z)$  et  $V(Z)$ .

**Exercice 2.** Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires.

On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à ce qu'il ne reste que des boules d'une seule couleur dans l'urne.

Soit  $X$  le nombre de tirages nécessaires.

1. Quelle est la loi de  $X$  ?
2. Calculer  $P(X \leq 4)$ .
3. Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

**Exercice 3.** Une urne contient 2 boules blanches et  $n - 2$  boules rouges.

On effectue des tirages sans remise dans cette urne. On appelle  $X$  le rang de sortie de la première boule blanche et  $Y$  le nombre de boules rouges restant à ce moment dans l'urne.

1. Déterminer la loi de  $X$  et  $E(X)$ .
2. Calculer  $E\left(\frac{1}{n-X}\right)$ .
3. Exprimer  $Y$  en fonction de  $X$  et calculer  $E(Y)$ .
4. Calculer la loi de  $Y$ .

**Exercice 4.** Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est  $p$  et celle de boules noires est  $q$ .

Ainsi, on a  $0 < p < 1$  et  $q = 1 - p$ .

On effectue une succession de tirages avec remise et on s'arrête dès qu'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.

On note  $X$  le nombre de tirages effectués.

1. Déterminer la loi de  $X$ .
2. Montrer que  $E(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ .

**Exercice 5.** Soit  $X$  une variable aléatoire discrète telle que  $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \setminus \{1; 2\}$  et pour tout  $k \in X(\Omega)$ ,  $P(X = k) = \frac{1}{2^{k-2}}$ . Vérifier que l'on définit ainsi une loi de probabilité. Calculer l'espérance de  $X$ .

**Exercice 6.** Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge.

On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne selon le protocole suivant :

Après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, une boule de la couleur de la boule qui vient d'être tirée.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $X_n$  la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des  $n$  premiers tirages.

1. Déterminer la loi de  $X_1$ .
2. Déterminer la loi de  $X_2$ .
3. Déterminer  $X_n(\Omega)$
4. Montrer par récurrence que  $X_n$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 0; n \rrbracket$ .
5. Donner l'espérance et la variance de  $X_n$ .

**Exercice 7.** On désigne par  $n$  un entier naturel non nul.

On lance  $n$  fois une pièce de monnaie donnant "pile" avec la probabilité  $p$  (avec  $0 < p < 1$ ) et "face" avec la probabilité  $q = 1 - p$ . On appelle  $k$ -chaîne une suite de  $k$  lancers consécutifs ayant tous donné "pile", cette suite devant être suivie d'un "face" ou être la dernière suite du tirage.

Pour tout  $k$  de  $\{1, \dots, n\}$ , on note  $Y_k$  la variable aléatoire égale au nombre total de  $k$ -chaînes de "pile" obtenues au cours de ces  $n$  lancers.

Pour tout  $k$  de  $\{1, \dots, n\}$ , on pourra noter  $P_k$  l'évènement "on obtient "pile" au  $k^{\text{ème}}$  lancer"

Par exemple, avec  $n = 11$ , si l'on a obtenu les résultats  $P_1 P_2 F_3 F_4 P_5 P_6 P_7 F_8 P_9 F_{10} P_{11}$  alors  $Y_1 = 2$ ,  $Y_2 = 1$  et  $Y_3 = 1$ .

Le but de cet exercice est de déterminer, pour tout  $k$  de  $\{1, \dots, n\}$ , l'espérance de  $Y_k$ , noté  $E(Y_k)$ .

1. Déterminer la loi de  $Y_n$  et donner  $E(Y_n)$ .
2. Déterminer la loi de  $Y_{n-1}$  et donner  $E(Y_{n-1})$ .
3. Dans cette question,  $k$  désigne un élément de  $\{1, \dots, n-2\}$ .  
 Pour tout  $i$  de  $\{1, \dots, n\}$ , on note  $X_{i,k}$  la variable aléatoire qui vaut 1 si une  $k$ -chaîne de "pile" commence au  $i^{\text{ème}}$  lancer et qui vaut 0 sinon.
  - (a) Calculer  $P(X_{1,k} = 1)$ .
  - (b) Soit  $i \in \{2, \dots, n-k\}$ . Montrer que  $P(X_{i,k} = 1) = q^2 p^k$ .
  - (c) Montrer que  $P(X_{n-k+1,k} = 1) = qp^k$ .
  - (d) Exprimer  $Y_k$  en fonction des variables  $X_{i,k}$  puis déterminer  $E(Y_k)$ .

## II. Révisions de probabilités conditionnelles et formule des probabilités total

**Exercice 8.** Soient deux urnes  $U_1$  et  $U_2$  telles que :  $U_1$  contient 10 boules blanches et 2 boules noires et  $U_2$  contient 7 boules blanches et 4 boules noires.

On tire une boule dans  $U_1$ , que l'on met dans  $U_2$ , puis on tire une boule dans  $U_2$ .

1. Introduire des notations mathématiques pour écrire les probabilités données par l'énoncé.
2. Calculer la probabilité de tirer deux boules blanches.
3. Calculer la probabilité de tirer une boule noire dans  $U_2$ .
4. On a tiré une boule blanche dans  $U_2$ . Quelle est la probabilité que l'on ait tiré une boule noire dans  $U_1$  ?

**Exercice 9** (chaîne de Markov).

Monsieur Thurman prend chaque jour le bus ou le métro pour se rendre au travail. Le trajet en métro est moins direct, mais le bus n'est pas fiable : La probabilité qu'il soit en retard de plus de 7 minutes un jour donné est de  $\frac{1}{3}$ .

Monsieur Thurman agit ainsi :

- le premier jour, il prend le bus ;
- Si le jour  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) il attend plus de 7 minutes pour prendre le bus, le jour  $n + 1$  il prend le métro, sinon il prend de nouveau le bus ;
- Si le jour  $n$  il prend le métro, le jour  $n + 1$  il prend le métro ou le bus de façon équiprobable.

On note  $p_n$  la probabilité de l'évènement  $A_n$  : "Monsieur Thurman prend le bus le jour  $n$ "

1. Ecrire, avec des notations mathématiques, les probabilités données par l'énoncé.
2. Justifier que pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$p_{n+1} = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{2}$$

3. En déduire l'expression de  $p_n$  en fonction de  $n$ .
4. La suite  $p_n$  est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

**Exercice 10** (chaîne de Markov).

Un feu bicolore, lorsqu'il est rouge à l'instant  $n$ , passe au vert à l'instant suivant avec la probabilité  $\frac{2}{3}$ , et lorsqu'il est vert à  $t = n$ , il passe au rouge à l'instant suivant avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ . On note  $r_n = P(R_n)$  et  $v_n = P(V_n)$  où  $R_n$  (respectivement  $V_n$ ) est l'évènement : le feu est rouge (resp vert) à l'instant  $n$ .

1- Etablir les relations de récurrence liant  $r_{n+1}$  et  $v_{n+1}$  à  $r_n$  et  $v_n$ . Déterminer  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que

$$\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

2- Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ .

3- Déterminer deux matrices  $B$  et  $C$  telles que :  $\begin{cases} B + C &= I \\ B - \frac{1}{6}C &= A \end{cases}$ . Calculer  $B^2$ ,  $C^2$ ,  $BC$  et  $CB$ .

4- Calculer  $A^n$ . En déduire  $r_n$  et  $v_n$ , puis leurs limites respectives.

**Exercice 11.** Un joueur effectue une série de manches indépendantes. A chaque manche il gagne 1 euro avec la probabilité  $p$  et il perd 1 euro avec la probabilité  $q = 1 - p$ . On suppose  $p \neq q$ .

Le jeu s'arrête soit quand le joueur est ruiné, soit quand il a accumulé une somme de  $N$  euros ( $N$ ) déterminée avant le début du jeu.

On note  $u_k$  la probabilité de l'évènement :  $R_k$  : « le joueur parvient à la ruine en ayant commencé à jouer avec un capital initial de  $k$  euros ».

1. Calculer  $u_0$  et  $u_N$ .
2. En considérant les issues possibles de la première manche et en appliquant la formule des probabilités totales, montrer que :  $u_k = pu_{k+1} + qu_{k-1}$ .
3. En déduire  $u_k = p^k \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}$ .

### III. Révisions de lois discrètes usuelles

#### a) Loi de Bernoulli (ou loi indicatrice d'un évènement)

##### Théorème 1

On effectue une épreuve aléatoire  $e$  et on s'intéresse à la réalisation d'un évènement  $A$  de probabilité  $p = P(A)$  (épreuve de Bernoulli).

Soit  $X$  la V.A.R indicatrice de l'évènement  $A$  définie par :  $\begin{cases} X = 1 \text{ si } A \text{ est réalisé} \\ X = 0 \text{ si } A \text{ n'est pas réalisé} \end{cases}$ .

Alors la V.A.R. finie  $X$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p$  (notée  $\mathcal{B}(p)$ ).

**Loi de X :**

|            |         |     |
|------------|---------|-----|
| $k$        | 0       | 1   |
| $P(X = k)$ | $1 - p$ | $p$ |

**Espérance et variance de X :**

$$E(X) = p \text{ et } V(X) = p(1 - p)$$

#### b) Loi binomiale

##### Théorème 2

Soit  $e$  une épreuve aléatoire et  $A$  un évènement considère comme le succès de l'épreuve  $e$ , de probabilité  $p = P(A)$ .

Si on effectue un nombre défini  $n$  de répétitions indépendantes de la même épreuve  $e$ , alors la V.A.R.  $X$  égale au **nombre de succès** au cours de ces  $n$  épreuves suit une loi binomiale de taille  $n$  et de paramètre  $p$  (notée  $\mathcal{B}(n, p)$ ).

**Loi de X :**

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \text{ et pour tout } k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

**Espérance et variance de X :**

$$E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1 - p)$$

#### c) Loi géométrique

##### Théorème 3

Soit  $e$  une épreuve aléatoire et  $A$  un évènement considère comme le succès de l'épreuve  $e$ , de probabilité  $p = P(A)$ .

Si on effectue un nombre indéfini de répétitions indépendantes de la même épreuve  $e$ , alors la V.A.R.  $X$  égale au rang d'apparition du premier succès suit une loi géométrique de paramètre  $p$  (notée  $\mathcal{G}(p)$ ).

**Loi de X :**

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ (variable discrète infinie) et pour tout } n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = p(1 - p)^{n-1}.$$

**Espérance et variance de X :**

$X$  admet une espérance et une variance et :

$$E(X) = \frac{1}{p} \text{ et } V(X) = \frac{1 - p}{p^2}$$

**d) Loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$** **Théorème 4**

Une variable aléatoire  $X$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$  (notée  $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ ) lorsque  $X$  prend chacune des valeurs 1, 2, 3, ...,  $n$  avec la même probabilité (situation d'équiprobabilité).

**Loi de  $X$  :**

$X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$  et pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $P(X = k) = \frac{1}{n}$ .

**Espérance et variance de  $X$  :**

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \text{ et } V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

**e) Loi de Poisson****Théorème 5**

**Loi de  $X$  :** Une V.A.R.  $X$  est dite une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  si elle a la loi suivante :

$X(\Omega) = \mathbb{N}$  (variable discrète infinie) et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P(X = n) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}$ .

**Espérance et variance de  $X$  :**

$$E(X) = \lambda \text{ et } V(X) = \lambda$$

**Exercice 12.** Dans les situations suivantes, dites si la variable aléatoire  $X$  suit une loi usuelle (oui ? non ? pourquoi ?). Si oui, explicitez la loi, son espérance et sa variance.

1. Une urne contient 3 boules rouges et 5 boules noires. On effectue une succession de 10 tirages dans cette urne, avec remise et  $X$  compte le nombre de boules noires obtenues.
2. Une urne contient 3 boules rouges et 5 boules noires. On effectue une succession de 10 tirages dans cette urne, sans remise et  $X$  compte le nombre de boules noires obtenues.
3. Une urne contient 3 boules rouges et 5 boules noires. On effectue une succession de tirages avec remise et on s'arrête lorsqu'on a obtenu la première boule rouge.  $X$  est le nombre de tirages effectués.
4. Une urne contient 3 boules rouges et 5 boules noires. On effectue une succession de 10 tirages avec remise et on note  $X$  le rang d'apparition de la première boule rouge. On convient que  $X = 0$  si les boules tirées sont toutes noires.
5. Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est  $p$  et celle de boules noires est  $q$ .  
Ainsi, on a  $0 < p < 1$  et  $q = 1 - p$ .  
On effectue une succession de tirages avec remise et on s'arrête dès qu'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.  
On note  $X$  le nombre de tirages effectués.
6. On lance un dé à six faces équilibré et  $X$  est le numéro de la face obtenue.
7. Soit  $n$  un entier naturel non nul. On considère  $n$  joueurs qui visent une cible. Chaque joueur effectue deux tirs. À chaque tir, chaque joueur a la probabilité  $p$  d'atteindre la cible. Les tirs sont indépendants les uns des autres.  
On définit la variable aléatoire  $X$  égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au moins une fois à l'issue des deux tirs.

**Exercice 13.** Une municipalité a lancé une étude statistique concernant les problèmes rencontrés par les usagers des transports en commun.

L'enquête révèle que la probabilité qu'un usager attende moins de 7 minutes à une station donnée est égale à  $p$ ,  $p$  appartenant à  $]0, 1[$ .

Monsieur Thierex fréquente cette ligne de bus tous les jours pendant 10 jours. On suppose que les retards journaliers sont indépendants.

1. On désigne par  $Y$  la variable aléatoire réelle égale au nombre de jours où Monsieur Thierex a attendu moins de 7 minutes.

Déterminer la loi de  $Y$ , son espérance et sa variance en fonction de  $p$ .

2. On définit par  $Z$  la variable aléatoire discrète réelle indiquant le rang  $k$  du jour où pour la première fois Monsieur Thierex attend plus de 7 minutes si cet événement se produit. Dans le cas contraire si le temps d'attente est inférieur à 7 minutes pendant les dix jours,  $Z$  prend la valeur 0.

Déterminer la loi de  $Z$ .

**Exercice 14.** 1. On effectue une succession (infinie) de lancers d'un dé équilibré. On note  $X$  le rang du premier "1" obtenu. Déterminer la loi de  $X$ , son espérance et sa variance. Calculer  $P(X \leq k)$  puis  $P(X > k)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .

2. On effectue une succession (infinie) de lancers d'un dé équilibré. On note  $Y_n$  le rang d'apparition du nième "1" obtenu.

On note également  $C_M$  la variable aléatoire égale au nombre de "1" obtenus au cours des  $M$  premiers lancers.

(a) Déterminer la loi de  $C_M$ .

(b) Soit  $k \geq n$ , exprimer l'évènement  $[Y_n = k]$  à l'aide de la variable aléatoire  $C_{k-1}$  et de l'évènement  $A_k$  : "obtenir la face 1 au k ième lancer".

(c) En déduire la loi de  $Y_n$ .

**Exercice 15.** Une urne contient  $n$  jetons numérotés de 1 à  $n$ . On effectue des tirages successifs d'un jeton avec remise.  $X$  est la v.a.r. égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois deux numéros distincts.

On note  $A_i$  : "le jeton numéro  $i$  est obtenu au premier tirage".

1. Calculer  $P_{A_i}(X = k)$ .

2. En appliquant la formule des probabilités totales, déterminer la loi de  $X$ .

3. Déterminer la loi de  $Y = X - 1$ . La reconnaître et en déduire sans calculs  $E(X)$  et  $V(X)$ .

**Exercice 16.** 1.  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ . Espérance de  $Y = (-1)^X$ .

2.  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ . Espérance de  $Y = \frac{1}{X+1}$ . (on pourra vérifier que pour tout  $0 \leq k \leq n$ , on a  $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}$ ).