

# TD 7 : correction

## I. Calculs d'intégrales

### Exercice 1.

1. Par linéarité de l'intégrale puis en faisant apparaître des intégrales usuelles :

$$\begin{aligned}\int_1^4 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) dx &= [\ln(|x|)]_1^4 + \int_1^4 x^{-3/2} dx = \ln(4) - \ln(1) + \left[ \frac{x^{-1/2}}{-1/2} \right]_1^4 \\ &= 2 \ln 2 - 2 \left( \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{1}} \right) = 2 \ln 2 - 2 \left( -\frac{1}{2} \right) = 2 \ln 2 + 1.\end{aligned}$$

2. On reconnaît la forme  $u'e^u$  à une constante près, qu'on transforme : comme la dérivée de  $-x^5$  est  $-5x^4$ ,

$$\int_0^1 2x^4 e^{-x^5} dx = -\frac{2}{5} \int_0^1 (-5x^4 e^{-x^5}) dx = -\frac{2}{5} [e^{-x^5}]_0^1 = -\frac{2}{5} (e^{-1} - e^0) = \frac{2}{5} \left( 1 - \frac{1}{e} \right) = \frac{2(e-1)}{5e}.$$

3. On pose  $u'(t) = (1-t)^n$  et  $v(t) = t$

Alors  $u(t) = -\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}$  et  $v'(t) = 1$ .

$u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$ , par I.P.P. on obtient donc :

$$\int_0^1 t(1-t)^n dt = -\frac{1}{n+1} [t(1-t)^{n+1}]_0^1 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 (1-t)^{n+1} dt = \frac{1}{n+1} \left[ -\frac{(1-t)^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

4. Comme la dérivée de  $u = 3x + 1$  est 3, on transforme :

$$\int_0^t \sqrt{3x+1} dx = \frac{1}{3} \int_0^t 3(3x+1)^{1/2} dx = \frac{1}{3} \left[ \frac{(3x+1)^{3/2}}{3/2} \right]_0^t = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \left( (3t+1)^{3/2} - 1^{3/2} \right) = \frac{2}{9} ((3t+1)\sqrt{3t+1} - 1)$$

5. Comme la dérivée de  $v = 5 + u^3$  est  $3u^2$ , on transforme :

$$\int_0^1 \frac{u^2}{5+u^3} du = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{3u^2}{5+u^3} du = \frac{1}{3} [\ln(|5+u^3|)]_0^1 = \frac{1}{3} (\ln 6 - \ln 5) = \frac{1}{3} \ln \left( \frac{6}{5} \right).$$

6. De même la dérivée de  $5 + u^3$  est  $3u^2$ , donc :

$$\int_0^1 \frac{u^2}{(5+u^3)^2} du = \frac{1}{3} \int_0^1 3u^2 (5+u^3)^{-2} du = \frac{1}{3} \left[ \frac{(5+u^3)^{-1}}{-1} \right]_0^1 = -\frac{1}{3} \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{5} \right) = -\frac{1}{3} \times \frac{5-6}{30} = \frac{1}{90}.$$

7. Une fois de plus la dérivée de  $5 + u^3$  est  $3u^2$ , donc :

$$\int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{5+u^3}} du = \frac{1}{3} \int_0^1 3u^2 (5+u^3)^{-1/2} du = \frac{1}{3} \left[ \frac{(5+u^3)^{1/2}}{1/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3} (\sqrt{6} - \sqrt{5}).$$

8. On remarque qu'avec  $u = \ln x$ , on a  $u' = \frac{1}{x}$  donc on reconnaît la forme  $u'u$  :

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \left[ \frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^e = \frac{(\ln e)^2 - (\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

9. On applique la linéarité de l'intégrale, puis on reconnaît une forme usuelle d'IPP (car la dérivée de  $\ln t$  n'est pas, à une constante près,  $t^2$ ) :

$$\int_1^x (1 - t^2 \ln t) dt = \int_1^x dt - \int_0^x t^2 \ln t dt = x - 1 - \int_1^x t^2 \ln t dt.$$

Calculons alors  $\int_1^x t^2 \ln t dt$  : en posant

$$u = \ln t \quad \text{et} \quad v = \frac{t^3}{3}$$

qui sont de classe  $C^1$  sur  $[1; x]$  (ou  $[x; 1]$ ) avec

$$u' = \frac{1}{t} \quad \text{et} \quad v' = t^2$$

une intégration par parties donne :

$$\int_1^x t^2 \ln t dt = \left[ \frac{t^3}{3} \ln t \right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times \frac{t^3}{3} dt = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \ln 1 - \frac{1}{3} \int_1^x t^2 dt = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \left[ \frac{t^3}{3} \right]_1^x = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} (x^3 - 1).$$

On en déduit finalement que :

$$\int_1^x (1 - t^2 \ln t) dt = x - 1 - \left( \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} (x^3 - 1) \right) = x - 1 - \frac{x^3}{3} \ln x + \frac{1}{9} (x^3 - 1) = x + \frac{1}{9} x^3 - \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{10}{9}.$$

10. Comme la dérivée de  $-x$  est  $-1$  et ne donne pas le  $x$  devant l'exponentielle, on reconnaît un cas classique d'IPP : en posant

$$u = x + 1 \quad \text{et} \quad v = -e^{-x}$$

qui sont de classe  $C^1$  sur  $[0; 1]$ , avec

$$u' = 1 \quad \text{et} \quad v' = e^{-x}$$

une intégration par parties donne :

$$\int_0^1 (x+1)e^{-x} dx = \left[ -(x+1)e^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} dx = -2e^{-1} - (-1e^0) - \left[ e^{-x} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{e} - (e^{-1} - e^0) = 1 - \frac{2}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 2 - \frac{3}{e}.$$

11. Comme on ne sait pas primitiver la valeur absolue, on sépare l'intégrale en une partie où l'intérieur est positif et une autre où l'intérieur est négatif :

$$x - 2 \geq 0 \iff x \geq 2$$

donc pour  $x \geq 2$ ,  $x - 2 \geq 0$  et  $|x - 2| = x - 2$ , et pour  $x \leq 2$ ,  $x - 2 \leq 0$  donc  $|x - 2| = 2 - x$  donc :

$$\begin{aligned} \int_0^4 |x - 2| dx &= \int_0^2 (2 - x) dx + \int_2^4 (x - 2) dx = \left[ 2x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 + \left[ \frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^4 \\ &= 4 - \frac{4}{2} - (0 - 0) + \left( \frac{16}{2} - 8 \right) - \left( \frac{2^2}{2} - 4 \right) = 4 - 2 + 8 - 8 - (2 - 4) = 2 - (-2) = 4. \end{aligned}$$

### Exercice 2.

1. Ce changement de variable est bien de classe  $C^1$  sur  $[0; 1]$ , et de plus :

$$u = 3x + 1 \iff x = \frac{u - 1}{3}$$

• Bornes :

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline u & 1 & 4 \end{array}$$

$$x = 0 \implies u = 1 \quad \text{et} \quad x = 1 \implies u = 4$$

• **Elément différentiel :**

$$du = u'(x)dx = 3dx \quad \text{donc} \quad dx = \frac{1}{3}du$$

donc :

$$\int_0^1 x\sqrt{3x+1} dx = \int_1^4 \frac{u-1}{3} \times \sqrt{u} \times \frac{1}{3} du = \frac{1}{9} \int_1^4 (u-1)\sqrt{u} du = \frac{1}{9} \left( \int_1^4 u^{3/2} du - \int_1^4 u^{1/2} du \right)$$

On reconnaît des primitives usuelles :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\sqrt{3x+1} dx &= \frac{1}{9} \left( \left[ \frac{u^{5/2}}{5/2} \right]_1^4 - \left[ \frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_1^4 \right) = \frac{1}{9} \left( \frac{2}{5} [4^{5/2} - 1^{5/2}] - \frac{2}{3} [4^{3/2} - 1^{3/2}] \right) \\ &= \frac{1}{9} \left( \frac{2}{5} [4^2\sqrt{4} - 1] - \frac{2}{3} [4\sqrt{4} - 1] \right) = \frac{1}{9} \left( \frac{2}{5} [16 \times 2 - 1] - \frac{2}{3} [4 \times 2 - 1] \right) \\ &= \frac{1}{9} \left( \frac{2 \times 31}{5} - \frac{2 \times 7}{3} \right) = \frac{1}{9} \times \frac{2 \times 31 \times 3 - 2 \times 7 \times 5}{3 \times 5} = \frac{2(93 - 35)}{9 \times 15} = \frac{2 \times 58}{135} = \frac{116}{135}. \end{aligned}$$

2. Ce changement de variable est bien de classe  $C^1$  sur  $[1;4]$ , et de plus :

$$u = 1 + \sqrt{x} \iff \sqrt{x} = u - 1 \iff x = (u - 1)^2$$

• **Bornes :**

$$\frac{x}{u} \left| \begin{array}{c|c} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{array} \right.$$

• **Elément différentiel :**

$$du = u'(x)dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \quad \text{donc} \quad dx = 2\sqrt{x}du = 2(u-1)du$$

donc :

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx &= \int_2^3 \frac{1+(u-1)^2}{u} \times 2(u-1) du = 2 \int_2^3 \frac{(u-1)(1+u^2-2u+1)}{u} du \\ &= 2 \int_2^3 \frac{(u-1)(u^2-2u+2)}{u} du = 2 \int_2^3 \frac{u^3-2u^2+2u-u^2+2u-2}{u} du \\ &= 2 \int_2^3 \frac{u^3-3u^2+4u-2}{u} du = 2 \int_2^3 \left( u^2-3u+4-\frac{2}{u} du \right) = 2 \left[ \frac{u^3}{3} - 3\frac{u^2}{2} + 4u - 2\ln u \right]_2^3 \\ &= 2 \left( \frac{27}{3} - 3 \times \frac{9}{2} + 4 \times 3 - 2\ln 3 - \left[ \frac{8}{3} - 3 \times \frac{4}{2} + 4 \times 2 - 2\ln 2 \right] \right) \\ &= 2 \left( 9 - \frac{27}{2} + 12 - 2\ln 3 - \frac{8}{3} + 6 - 8 + 2\ln 2 \right) = 2 \left( 19 - \frac{26+1}{2} - \frac{6+2}{3} - 2\ln 3 + 2\ln 2 \right) \\ &= 2 \left( 19 - 13 - \frac{1}{2} - 2 - \frac{2}{3} + 2\ln 2 - 2\ln 3 \right) = 2 \left( 4 - \frac{3+4}{6} + 2\ln 2 - 2\ln 3 \right) \\ &= 2 \left( 4 - \frac{7}{6} + 2\ln 2 - 2\ln 3 \right) = 2 \left( \frac{24-7}{6} + 2\ln 2 - 2\ln 3 \right) = \frac{17}{3} + 4\ln 2 - 4\ln 3. \end{aligned}$$

**Exercice 3.**1.  $f$  est continue sur  $[-a;a]$  donc admet bien une intégrale sur ce segment. De plus, en posant le changement de variable  $u = -t$  (de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  donc sur  $[-a;a]$ ) on a :

$$\int_{-a}^0 f(t)dt = \int_a^0 f(-u)(-du) = -\int_a^0 f(-u)du \quad (\text{par linéarité de l'intégration}) = \int_0^a f(-u)du = \int_0^a f(u)du \quad (\text{par parité de } f) = \int_0^a f(t)dt.$$

2. Par le même changement de variable on obtient :  $\int_{-a}^0 f(t)dt = -\int_0^a f(t)dt$  par imparité de  $f$ .

$$\text{Ainsi, } \int_{-a}^a f(t)dt = \int_{-a}^0 f(t)dt + \int_0^a f(t)dt \quad (\text{par relation de Charles}) = 0$$

## II. Suites définies par une intégrale

### Exercice 4.

Soit  $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

1. Comme  $I_0 = \int_0^1 \ln(1+x) dx$  on reconnaît un cas classique d'IPP :

$$u = \ln(1+x) \quad \text{et} \quad v = x$$

sont de classe  $C^1$  sur  $[0; 1]$  avec

$$u' = \frac{1}{1+x} \quad \text{et} \quad v' = 1$$

donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_0 &= [x \ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = 1 \ln(2) - 0 \ln 1 - \int_0^1 \frac{1+x-1}{1+x} dx = \ln 2 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx \\ &= \ln 2 - [x - \ln(1+x)]_0^1 = \ln 2 - (1 - \ln(2) - [0 - \ln(1)]) = \ln 2 - 1 + \ln 2 = 2 \ln 2 - 1. \end{aligned}$$

2. (a) Pour une suite définie par une intégrale, on considère le signe de  $I_{n+1} - I_n$  : par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 x^{n+1} \ln(1+x) - \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx = \int_0^1 (x^{n+1} \ln(1+x) - x^n \ln(1+x)) dx \\ &= \int_0^1 x^n \ln(1+x)(x-1) dx. \end{aligned}$$

Or pour tout  $x \in [0; 1]$  on a :

$$x^n \geq 0, \quad x-1 \leq 0, \quad 1+x \geq 1 \text{ donc } \ln(1+x) \geq \ln 1 = 0$$

par stricte croissance de  $\ln$ . On en déduit par produit puis en intégrant avec les bornes dans l'ordre croissant que :

$$x^n \ln(1+x)(x-1) \leq 0 \quad \text{et enfin} \quad I_{n+1} - I_n \leq 0$$

donc  $I_{n+1} \leq I_n$  et la suite  $(I_n)$  est décroissante.

- (b) Cherchons à minorer  $(I_n)$  : en l'absence d'indication sur la minoration, on essaie avec 0 : on a déjà vu que sur  $[0; 1]$ ,

$$x^n \geq 0 \quad \text{et} \quad \ln(1+x) \geq 0 \quad \text{donc par produit} \quad x^n \ln(1+x) \geq 0$$

puis en intégrant avec les bornes dans l'ordre croissant on obtient  $I_n \geq 0$ .

La suite  $(I_n)$  est donc décroissante et minorée, elle converge.

3. (a) Pour tout  $x \in [0; 1]$  on a :

$$1 \leq 1+x \leq 2 \leq e \quad \text{donc} \quad \ln(1) \leq \ln(1+x) \leq \ln(2) \leq \ln(e) = 1$$

car on sait que  $e > 2$ , et que  $\ln$  est strictement croissante. On en déduit en multipliant par  $x^n \geq 0$  que :

$$\ln(1+x) \leq 1 \quad \text{donc} \quad x^n \ln(1+x) \leq x^n.$$

- (b) On intègre cette inégalité avec les bornes dans l'ordre croissant :

$$I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

(c) On a déjà vu que  $I_n \geq 0$  donc on obtient l'encadrement :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$  donc par théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

4. (a) On reconnaît la forme d'une intégration par parties : en posant

$$u = \ln(1+x) \quad \text{et} \quad v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

de classe  $C^1$  sur  $[0; 1]$  avec

$$u' = \frac{1}{1+x} \quad \text{et} \quad v' = x^n$$

on obtient :

$$I_n = \int_0^n x^n \ln(1+x) dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x} \times \frac{x^{n+1}}{n+1} dx = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx.$$

(b) On travaille sur le contenu de l'intégrale : pour tout  $x \in [0; 1]$  on a :

$$1 \leq 1+x \leq 2 \quad \text{donc par stricte décroissance de l'inverse sur } \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x} \leq 1.$$

On multiplie par  $x^{n+1} \geq 0$  et on obtient :

$$0 \leq \frac{x^{n+1}}{2} \leq x^{n+1}$$

enfin on intègre avec les bornes dans l'ordre croissant :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^{n+1} dx = \left[ \frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \frac{1}{n+2}.$$

(c) On va tenter d'encadrer  $I_n$  plus précisément que plus tôt dans le sujet en se servant de l'encadrement qu'on vient d'obtenir : comme  $-\frac{1}{n+1} < 0$ ,

$$0 \geq -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq -\frac{1}{(n+1)^2}$$

puis

$$\frac{\ln 2}{n+1} \geq I_n \geq \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

L'objectif est de faire apparaître un encadrement de  $I_n$  qui tendra vers 1 pour obtenir que ce ??? est un équivalent de  $I_n$  : pour cela on peut diviser par le terme de gauche (plus simple que celui de droite) pour faire apparaître 1 : comme  $\frac{\ln 2}{n+1} > 0$ ,

$$1 \geq \frac{I_n}{\frac{\ln 2}{n+1}} \geq 1 - \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{\ln 2}{n+1}} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \times \frac{n+1}{\ln 2} = 1 - \frac{1}{(n+1) \ln 2}.$$

Par opérations élémentaires immédiates le terme de droite de l'encadrement tend vers 1, donc par théorème d'encadrement on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{\frac{\ln 2}{n+1}} = 1 \quad \text{donc} \quad I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln 2}{n+1}.$$

### III Fonctions définies par une intégrale

**Exercice 5.**

1. Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$ , à valeurs dans un intervalle  $J$ . Soit  $f$  continue sur  $J$ .

- (a)  $f$  est continue sur  $J$  donc admet une primitive  $G$  qui est alors de classe  $C^1$  : on peut alors écrire que

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt = [G(t)]_{u(x)}^{v(x)} = G(v(x)) - G(u(x)).$$

$F$  est alors dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables, et :

$$F'(x) = v'(x)G'(v(x)) - u'(x)G'(u(x)) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

- (b) i. Montrons d'abord que  $F$  est bien une telle primitive : en appliquant la question 1 avec  $u(x) = a$  et  $v(x) = x$  qui sont bien dérivables, avec

$$u'(x) = 0 \quad \text{et} \quad v'(x) = 1$$

on obtient que  $F$  est dérivable et :

$$F'(x) = 1 \times f(x) - 0 \times f(a) = f(x)$$

donc  $F$  est bien une primitive de  $f$ . Montrons qu'elle s'annule en  $a$  :

$$F(a) = G(a) - G(a) = 0$$

donc  $F$  vérifie bien les hypothèses. Vérifions qu'elle est unique : pour cela on suppose qu'il existe une autre primitive  $H$  de  $f$  qui s'annule en  $a$ , et on montre que  $F = H$ . Pour cela on considère la fonction  $(F - H)$  : celle-ci est dérivable et de dérivée

$$(F - H)'(x) = F'(x) - H'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

donc elle est constante : de plus on sait que

$$(F - H)(a) = F(a) - H(a) = 0 - 0 = 0$$

donc on en déduit que pour tout  $x \in J$ ,  $(F - H)(x) = 0$  donc  $(F - H) = 0$  et enfin  $F = H$ . On en déduit bien que  $F$  est l'unique primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$ .

- ii. • La fonction  $f : t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$  est définie et continue sur  $]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$ . Or  $e \in ]1; +\infty[$  donc  $F$  est définie sur  $]1; +\infty[$  et est l'unique primitive de  $f$  qui s'annule en  $e$ . Ainsi,  $F'(x) = \frac{1}{\ln(x)} > 0$  car  $x > 1$  donc  $F$  est strictement croissante sur cet intervalle.

• On remarque que  $G(x) = -\int_2^x \ln(1+t^2) dt$ .

Or la fonction  $t \mapsto \ln(1+t^2)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  car  $1+t^2 \geq 1 > 0$ , donc  $x \mapsto \int_2^x \ln(1+t^2) dt$  est l'unique primitive sur  $\mathbb{R}$  qui s'annule en 2 de cette fonction. On en déduit que  $G$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et  $G'(x) = -\ln(1+x^2) \leq 0$  car  $1+x^2 \geq 1$ .

On en déduit que  $G$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 6.**

Soit  $F$  définie par  $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)}$ .

1.  $F(x)$  est définie si et seulement si la fonction  $g : t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$  est continue sur l'ensemble du segment  $[x; x^2]$  ou  $[x^2; x]$ .

Or  $g$  est définie et continue pour  $t > 0$  et  $t \ln t \neq 0$ , donc  $t \neq 0$  et  $\ln t \neq 0 \iff t \neq 1$  donc sur  $]0; 1[$  et  $]1; +\infty[$ .

Ainsi : si  $x \in ]0; 1[$  alors  $x^2 \in ]0; 1[$  donc  $[x^2, x] \subset ]0; 1[$  où  $f$  est continue ; et si  $x > 1$  alors  $x^2 > 1$  donc  $[x, x^2] \subset ]1; +\infty[$  où  $f$  est continue. On obtient finalement que  $F$  est définie sur  $]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$ .

2. Sur chacun des intervalles  $]0; 1[$  et  $]1; +\infty[$ ,  $g$  est continue donc admet une primitive  $G$  qui est de classe  $C^1$ . On peut alors écrire

$$F(x) = G(x^2) - G(x)$$

qui est dérivable comme composée et somme de fonctions dérivables, avec :

$$F'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = 2x \times \frac{1}{x^2 \ln(x^2)} - \frac{1}{x \ln x} = \frac{2x}{2x^2 \ln x} - \frac{1}{x \ln x} = \frac{1}{x \ln x} - \frac{1}{x \ln x} = 0$$

donc  $F$  est une fonction constante sur  $]0; 1[$  et constante sur  $]1; +\infty[$  (par contre on n'a aucune information sur la valeur de ces constantes, qui peuvent tout à fait être différentes l'une de l'autre).

3. On remarque que  $\frac{1}{t \ln t} = \frac{\frac{1}{t}}{\ln t}$  est de la forme  $\frac{u'}{u}$ , en posant  $u = \ln t$ , on peut donc primitiver :

$$F(x) = [\ln |\ln t|]_x^{x^2} = \ln |\ln(x^2)| - \ln |\ln x| = \ln |2 \ln x| - \ln |\ln x| = \ln 2 + \ln |\ln x| - \ln |\ln x| = \ln 2$$

qui est bien une fonction constante (et au passage on obtient cette fois que la constante est la même avant 1 et après 1).

### Exercice 7.

1.  $f(x)$  est défini si et seulement si la fonction  $g : t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$  est continue sur l'ensemble du segment  $[\frac{1}{x}; x]$  ou  $[x; \frac{1}{x}]$ .  
Or  $g$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc si  $x \geq 1$  alors  $[\frac{1}{x}; x] \subset \mathbb{R}_+^*$  et si  $0 < x < 1$  alors  $[x; \frac{1}{x}] \subset \mathbb{R}_+^*$ .  
On obtient finalement que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

2.  $g$  est continue sur donc y admet une primitive  $G$ . On peut alors écrire :

$$f(x) = G(x) - G\left(\frac{1}{x}\right)$$

qui est dérivable comme composée et somme de fonctions dérivables, avec :

$$f'(x) = G'(x) - \left(-\frac{1}{x^2}\right) G'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(x)}{1+x^2} + \frac{1}{x^2} \frac{\ln(\frac{1}{x})}{1+(\frac{1}{x})^2} = \frac{\ln(x)}{1+x^2} - \frac{\ln(x)}{1+x^2} = 0$$

$f' = 0$  donc on en déduit que  $f$  est constante :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $f(x) = f(1) = \int_1^1 g(t)dt = 0$ .

3. On pose  $u = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t = \frac{1}{u}$ ;  $u$  est bien de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

• bornes :

$$\frac{t}{u} \left| \frac{\frac{1}{x}}{x} \right| \frac{x}{\frac{1}{x}}$$

• élément différentiel :  $du = u'(t)dt = -\frac{1}{t^2}dt$  donc  $dt = -t^2 du = -\frac{1}{u^2} du$ .

Ainsi :  $f(x) = \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{\ln(\frac{1}{u})}{1+(\frac{1}{u})^2} - \frac{1}{u^2} du = -\int_x^{\frac{1}{x}} \frac{\ln(u)}{1+u^2} du = \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{\ln(u)}{1+u^2} du = -\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln(u)}{1+u^2} du = -f(x)$ .

On obtient  $f(x) = -f(x) \Leftrightarrow 2f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ .

### Exercice 8.

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)}$ .

1. La fonction  $g : t \mapsto \frac{1}{\ln(1+t^2)}$  est définie pour  $1+t^2 > 0$  (qui est toujours vrai) et  $\ln(1+t^2) \neq 0$ . On résout donc :

$$\ln(1+t^2) = 0 \Leftrightarrow 1+t^2 = e^0 = 1 \Leftrightarrow t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

On en déduit que  $g$  est définie, et continue par composée de fonctions continues, sur  $] -\infty; 0[$  et sur  $]0; +\infty[$ .

Pour que  $f$  soit bien définie, il faut et il suffit que le segment  $[x; 2x]$  ou  $[2x; x]$  soit inclus dans l'un de ces deux intervalles, donc que :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < x \\ 0 < 2x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 < x \\ 0 < x \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \in ]0; +\infty[$$

ou bien :

$$\begin{cases} 0 > x \\ 0 > 2x \end{cases} \iff \begin{cases} 0 > x \\ 0 > x \end{cases} \iff x \in ]-\infty; 0[$$

donc  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}_-^*$  et sur  $\mathbb{R}_+^*$ , donc sur  $\mathbb{R}^*$ .

2.  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  donc admet une primitive  $G$  qui est de classe  $C^2$  car  $g$  est de classe  $C^1$ . On peut alors écrire

$$f(x) = G(2x) - G(x)$$

et  $f$  est de classe  $C^2$  somme et composée de fonctions de classe  $C^2$ .

3. De plus pour tout  $x \neq 0$ ,

$$f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x) = 2 \times \frac{1}{\ln(1+4x^2)} - \frac{1}{\ln(1+x^2)}.$$

4.  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$  qui est centré en 0, et de plus :

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)}.$$

On pose le changement de variable (qui est bien de classe  $C^1$ )  $u = -t \iff t = -u$ , donc  $dt = -du$  et :

donc :

$$f(-x) = \int_x^{2x} \frac{-du}{\ln(1+[-u]^2)} = - \int_x^{2x} \frac{du}{\ln(1+u^2)} = -f(x)$$

donc  $f$  est impaire.

5. On étudie tout d'abord le signe de l'intérieur : le numérateur est strictement positif, et

$$\ln(1+t^2) \geq 0 \iff 1+t^2 \geq e^0 = 1 \iff t^2 \geq 0$$

qui est toujours vrai, et l'égalité n'est vraie qu'en 0. donc pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ , par quotient de facteurs strictement positifs,  $\frac{1}{\ln(1+t^2)} > 0$ .

Pour  $x < 0$ , on a  $x \leq 2x$  donc on intègre avec les bornes dans l'ordre décroissant et :

$$f(x) \leq 0$$

Pour  $x > 0$ , on a  $x \leq 2x$  donc on intègre avec les bornes dans l'ordre croissant et :

$$f(x) \geq 0.$$

Remarque : le deuxième cas peut être obtenu par imparité de  $f$  également.

6. On commence par majorer le contenu de  $f$  (car les bornes sont dans l'ordre croissant) ; pour tout  $t \in [x; 2x]$  on a :

$$x \leq t \leq 2x \implies x^2 \leq t^2 \leq 4x^2 \implies 1+x^2 \leq 1+t^2 \leq 1+4x^2 \implies \ln(1+x^2) \leq \ln(1+t^2) \leq \ln(1+4x^2)$$

par stricte croissance du carré et du logarithme sur  $\mathbb{R}_+$ , puis par stricte décroissance de l'inverse sur  $\mathbb{R}_+^*$  :

$$\frac{1}{\ln(1+4x^2)} \leq \frac{1}{\ln(1+t^2)} \leq \frac{1}{\ln(1+x^2)}.$$

On intègre avec les bornes dans l'ordre croissant :

$$f(x) \geq \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(1+4x^2)} = \frac{1}{\ln(1+4x^2)} [t]_x^{2x} = \frac{2x-x}{\ln(1+4x^2)} = \frac{x}{\ln(1+4x^2)}.$$



On cherche alors la limite de ce minorant : comme on a une forme indéterminée, on cherche un équivalent plus simple du dénominateur :

$$\begin{aligned}\ln(1+4x^2) &= \ln\left[4x^2\left(1+\frac{1}{4x^2}\right)\right] = \ln(4x^2) + \ln\left(1+\frac{1}{4x^2}\right) = 2\ln 2 + 2\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{4x^2}\right) \\ &= 2\ln x \left[1 + \frac{\ln 2}{\ln x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{4x^2}\right)}{2\ln x}\right]\end{aligned}$$

et par opérations élémentaires (composées, quotients puis sommes de limites)

$$\left[1 + \frac{\ln 2}{\ln x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{4x^2}\right)}{2\ln x}\right] \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

on obtient :

$$\ln(1+x^2) \underset{+\infty}{\sim} 2\ln x \quad \text{donc} \quad \frac{x}{\ln(1+4x^2)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{2\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

par croissances comparées. Enfin par minoration on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

## IV Comparaison somme-intégrale

### Exercice 9.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[1, +\infty[$  par  $f(t) = t \ln(t)$  et soit  $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ .

1. La fonction  $f$  est croissante sur  $[1; +\infty[$  car dérivable et

$$f'(t) = \ln t + t \times \frac{1}{t} = \ln t + 1 \geq 1 > 0$$

car  $t \geq 1$ , donc pour tout  $k \geq 1$  on peut écrire :

Pour tout  $t \in [k; k+1]$ , par croissance de  $f$ , puis en intégrant avec les bornes dans l'ordre croissant :

$$f(k) \leq f(t) \leq f(k+1) \quad \text{donc} \quad \int_k^{k+1} f(k) \, dt \leq \int_k^{k+1} f(t) \, dt \leq \int_k^{k+1} f(k+1) \, dt$$

et enfin en sortant les constantes  $f(k)$  et  $f(k+1)$  des intégrales pour les calculer :

$$f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t) \, dt \leq f(k+1).$$

2. Par relation de Chasles, cette somme s'écrit :

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \, dt = \int_1^2 f(t) \, dt + \int_2^3 f(t) \, dt + \cdots + \int_{n-1}^n f(t) \, dt = \int_1^n f(t) \, dt.$$

3. En sommant les inégalités de la question 1 pour  $k$  allant de 1 à  $n-1$  on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leq \int_1^n f(t) \, dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1).$$

En effectuant le changement d'indice  $k' = k+1$  dans la somme de droite on obtient :

$$\sum_{k=1}^n f(k) - f(n) \leq \int_1^n f(t) \, dt \leq \sum_{k=2}^n f(k) = \sum_{k=1}^n f(k) - f(1).$$

Enfin comme  $f(n) = n \ln n$  et  $f(1) = 1 \ln 1 = 0$  on obtient bien :

$$S_n - \ln n \leq \int_1^n f(t) \, dt \leq S_n.$$

4. Prenons l'inégalité de gauche, on obtient :

$$S_n - \ln n \leq \int_1^n f(t) dt \quad \text{donc} \quad S_n \leq \int_1^n f(t) dt + n \ln(n).$$

Prenons celle de droite on obtient :

$$\int_1^n f(t) dt \leq S_n.$$

On en déduit en rassemblant :

$$\int_1^n f(t) dt \leq S_n \leq \int_1^n f(t) dt + n \ln(n).$$

5.  $\int_1^n f(t) dt$  s'obtient par intégration par parties : en posant

$$u = \ln(t) \quad \text{et} \quad v = \frac{t^2}{2}$$

qui sont de classe  $C^1$  sur  $[1; n]$  avec

$$u' = \frac{1}{t} \quad \text{et} \quad v' = t,$$

on obtient :

$$\int_1^n f(t) dt = \left[ \frac{t^2 \ln(t)}{2} \right]_1^n - \int_1^n \frac{t}{2} dt = \frac{n^2 \ln(n)}{2} - \left[ \frac{t^2}{4} \right]_1^n = \frac{n^2 \ln(n)}{2} - \frac{n^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

6. Divisons l'encadrement de la question 4 par le terme prépondérant de l'intégrale :  $\frac{n^2 \ln(n)}{2}$  : on obtient

$$1 - \frac{1}{2 \ln(n)} + \frac{1}{2n^2 \ln(n)} \leq \frac{2S_n}{n^2 \ln(n)} \leq 1 - \frac{1}{2 \ln(n)} + \frac{1}{2n^2 \ln(n)} + \frac{2}{n}.$$

Les termes à gauche et à droite tendent vers 1 donc par encadrement le quotient  $\frac{2S_n}{n^2 \ln(n)}$  aussi, et

$$S_n \sim \frac{n^2 \ln(n)}{2}.$$

### Exercice 10.

Soit  $u_n = n \sqrt{\frac{n!}{n^n}}$

1.  $\ln(u_n) = \ln\left(\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = \frac{1}{n} \ln\left(\prod_{k=1}^n \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right).$
2. Pour tout  $k \in \{1; 2; \dots; n-1\}$ ,  $\ln$  est croissante sur  $]0; 1]$  donc en particulier sur  $\left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$  ; ainsi,  $\forall x \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$  ;

$$\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \ln(x) \leq \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

On intègre pour  $x$  allant de  $\frac{k}{n}$  à  $\frac{k+1}{n}$  (bornes croissantes) :

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln\left(\frac{k}{n}\right) dx = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x) dx \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln\left(\frac{k+1}{n}\right) dx = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

3. On remarque par relation de Chasles que  $\int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \ln(x) dx + \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} \ln(x) dx + \int_{\frac{3}{n}}^{\frac{4}{n}} \ln(x) dx = \dots + \int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n}} \ln(x) dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x) dx.$

On somme donc l'inégalité de la question précédente pour  $k$  allant de 1 à  $n-1$  :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x) dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

Avec,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \ln \left( \frac{k}{n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln \left( \frac{k}{n} \right) = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n \ln \left( \frac{k}{n} \right) - \ln \left( \frac{n}{n} \right) \right) = u_n$$

et

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \ln \left( \frac{k+1}{n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln \left( \frac{k+1}{n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{l=2}^n \ln \left( \frac{l}{n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \ln \left( \frac{l}{n} \right) - \frac{1}{n} \ln \left( \frac{1}{n} \right) = \ln(u_n) - \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n}$$

On obtient bien l'encadrement souhaité.

4. Par intégration par partie, on a  $\int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx = \frac{\ln(n)}{n} - 1 + \frac{1}{n}$ .
5. En renversant les inégalités obtenues à la question 2., on a

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx + \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} \leq \ln(u_n) \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx$$

Par théorèmes de comparaison et théorème d'encadrement, on obtient donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = -1$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^{-1} = \frac{1}{e}$  (en composant par la fonction exponentielle continue en  $-1$ ).

### Exercice 11.

Soit  $f$  une fonction continue et décroissante sur  $[0, 1]$ . On pose  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$  (appelée somme de Riemann de  $f$  sur  $[0, 1]$ ).

Le but de cet exercice est de prouver, dans ce cas particulier, le théorème sur les sommes de Riemann :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 f(t) dt$$

1. Pour encadrer cette intégrale, commençons par encadrer le contenu : on sait que

$$\frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n}$$

donc par décroissance de  $f$ ,

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$$

en enfin on intègre avec les bornes dans l'ordre croissant :

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right) dx \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dx.$$

On fait sortir les constantes des intégrales de gauche et droite pour obtenir :

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right) dx = f\left(\frac{k+1}{n}\right) \left[x\right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} = \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

et de même

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dx = f\left(\frac{k}{n}\right) \left[x\right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} = \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

donc

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

2. On somme les inégalités comme indiqué, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

On fait sortir les constantes  $\frac{1}{n}$  des sommes de gauche et droite, et la somme d'intégrale se simplifie par relation de Chasles :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Enfin on applique dans la somme de gauche le changement d'indice  $k' = k + 1$  :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{n}{n}\right) - f\left(\frac{0}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - f(0) + f(1)$$

ce qui donne bien :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) = S_n + \frac{1}{n}(f(1) - f(0)) = S_n - \frac{1}{n}(f(0) - f(1))$$

et enfin :

$$S_n - \frac{1}{n}(f(0) - f(1)) \leq \int_0^1 f(x) dx \leq S_n.$$

3. L'inégalité de gauche donne :

$$S_n \leq \int_0^1 f(x) dx + \frac{1}{n}(f(0) - f(1))$$

et celle de droite :

$$\int_0^1 f(x) dx \leq S_n$$

donc on obtient l'encadrement :

$$\int_0^1 f(x) dx \leq S_n \leq \int_0^1 f(x) dx + \frac{1}{n}(f(0) - f(1)).$$

On prend ensuite les limites à gauche et à droite, et des deux côtés on obtient  $\int_0^1 f(x) dx$  : par encadrement on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 f(x) dx.$$