

TD 8 : Correction

Exercice 1 (EML 2006). Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application définie, pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, par : $f(M) = AM - MD$.

1. On résout l'équation, d'inconnue M quelconque dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} f(M) = 0 &\iff AM - MD = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} c & d \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} c & d-b \\ c & 0 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff c = 0 \text{ et } d = b \iff M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\text{Ker}(f) = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ tq } a, b \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

La famille $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$ est donc génératrice de $\text{Ker}(f)$ et libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires, c'en est donc une base et $\dim(\text{Ker } f) = 2$.

2. Par théorème du rang, on en déduit que :

$$\dim(\text{Im } f) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) - \dim(\text{Ker } f) = 4 - 2 = 2.$$

On résout avec une matrice M quelconque :

$$\begin{aligned} f(M) = 1.M &\iff AM - MD = M \iff \begin{pmatrix} z & t-y \\ z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \iff \begin{cases} z = x & t-y = y \\ z = z & t = 0 \end{cases} \\ f(M) = M &\iff \begin{cases} z = x & y = 0 \\ 0 = 0 & t = 0 \end{cases} \iff M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $f(M) = M \iff M \in \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \neq \{0\}$ donc 1 est valeur propre de f .

3. De même :

$$\begin{aligned} f(M) = -M &\iff AM - MD = -M \iff \begin{pmatrix} z & t-y \\ z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & -y \\ -z & -t \end{pmatrix} \iff \begin{cases} z = -x & t-y = -y \\ z = -z & 0 = -t \end{cases} \\ f(M) = M &\iff \begin{cases} x = 0 & 0 = 0 \\ z = 0 & t = 0 \end{cases} \iff M = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $f(M) = -M \iff M \in \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \neq \{0\}$ donc -1 est valeur propre de f .

4. Les deux sous-espaces propres qu'on vient de déterminer sont chacun de dimension 1, car à chaque fois on en a une famille génératrice constituée d'une seule matrice, non nulle, donc ce sont des familles libres et chacune est une base du sous-espace propre associé.

Enfin 0 est valeur propre de f et $\text{Ker } f = E_0(f)$ est de dimension 2, donc la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut $4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et f est diagonalisable.

5. On a vu que $\dim(E_0(f)) + \dim(E_1(f)) + \dim(E_{-1}(f)) = 4$ donc il ne peut pas y avoir d'autre valeur propre $\lambda \notin \{-1, 0, 1\}$, sinon on aurait forcément $\dim(E_\lambda(f)) \geq 1$ et la somme des dimensions des sous-espaces propres dépasserait la dimension de l'espace de départ, ce qui est impossible.

Ainsi, si $\lambda \notin \{-1, 0, 1\}$ il n'existe pas de matrice M autre que 0 telle que $f(M) = \lambda M$ donc $S = \{0\}$.

6. Dans une base de vecteurs propres, la matrice de f sera diagonale avec une diagonale constituée des valeurs propres :

$$D' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad D'^3 = \begin{pmatrix} (-1)^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D'$$

On en déduit que dans cette base :

$$\text{Mat}(f \circ f \circ f) = \text{Mat}(f)^3 = \text{Mat}(f) \iff f \circ f \circ f = f$$

Exercice 2. Soit l'application linéaire :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^t M \end{array}$$

1. $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \Phi^2(M) = \Phi \circ \Phi(M) = \Phi(\Phi(M)) = \Phi({}^t M) = {}^t({}^t M) = M$.

Ainsi,

$$\Phi^2 = Id$$

On en déduit que Φ est bijective de bijection réciproque $\Phi^{-1} = \Phi$.

2. D'après la question 1., le polynôme $P(X) = X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ est annulateur de Φ donc les seules possibles valeurs propres de Φ sont -1 et 1 .
3. Il n'y a pas autant de valeurs propres que la dimension de l'espace de départ. On est donc obligés de calculer les sous-espaces propres associés aux potentielles valeurs propres -1 et 1 .

- On résout l'équation $\Phi(M) = M$ d'inconnue $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$${}^t M = M \iff \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \iff a = a, c = b, d = d.$$

Ainsi,

$$E_1(\Phi) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \text{ tels que } a, b \text{ et } d \text{ réels} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est donc génératrice de $E_1(\Phi)$.

On résout l'équation $a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on obtient $a = b = c = 0$ donc cette famille est libre.

C'est donc bien une base de $E_1(\Phi)$ donc $\dim(E_1(\Phi)) = 3$.

- On résout l'équation $\Phi(M) = -M$ d'inconnue $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$${}^t M = -M \iff \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \iff a = 0, c = -b, d = 0.$$

Ainsi,

$$E_{-1}(\Phi) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \text{ tels que } b \text{ est réel} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est donc génératrice de $E_{-1}(\Phi)$.

De plus, elle est libre car constituée d'un vecteur non nul.

C'est donc bien une base de $E_{-1}(\Phi)$ donc $\dim(E_{-1}(\Phi)) = 1$.

4. On obtient $\dim(E_1(\Phi)) + \dim(E_{-1}(\Phi)) = 4 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ donc Φ est bien diagonalisable.

5. Il existe une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de Φ telle que $Mat_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\text{On a donc } Mat_{\mathcal{B}}(\Phi^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = I.$$

Donc $\Phi^2 = I$ car elles ont même matrice dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 3. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(X) = AXB$.

1. Astuce : On calcule $f(X)$ pour $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ quelconque ; pour éviter de faire 4 gros calculs.

$$\text{On obtient } f(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+2c & a+3b+c+3d \\ -2c & -c-3d \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi, en particulier on a : } f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

2. • λ est valeur propre de M si et seulement si $M - \lambda I$ n'est pas inversible :

$$\begin{aligned} M - \lambda I &= \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3-\lambda \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow (L_1 \leftrightarrow L_2) \begin{pmatrix} 1 & 3-\lambda & 1 & 3 \\ 2-\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3-\lambda \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow (L_2 \leftarrow L_2 - (2-\lambda)L_1) \begin{pmatrix} 1 & 3-\lambda & 1 & 3 \\ 0 & -(2-\lambda)(3-\lambda) & \lambda & -3(2-\lambda) \\ 0 & 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3-\lambda \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow (L_3 \leftrightarrow L_4) \begin{pmatrix} 1 & 3-\lambda & 1 & 3 \\ 0 & -(2-\lambda)(3-\lambda) & \lambda & -3(2-\lambda) \\ 0 & 0 & -1 & -3-\lambda \\ 0 & 0 & -2-\lambda & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow (L_4 \leftrightarrow L_4 - (2+\lambda)L_3)T_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 3-\lambda & 1 & 3 \\ 0 & -(2-\lambda)(3-\lambda) & \lambda & -3(2-\lambda) \\ 0 & 0 & -1 & -3-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & (2+\lambda)(3+\lambda) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, $M - \lambda I$ non inversible si et seulement si $\lambda \in \{-3; -2; 2; 3\}$.
on obtient $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(M) = \{-3; -2; 2; 3\}$.

• On résout l'équation $T_{-3} \times X = 0$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$; on obtient $X = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \\ -2y \end{pmatrix}$.

Ainsi, $E_{-3}(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ donc $E_{-3}(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right)$.

• On résout l'équation $T_{-2} \times X = 0$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$; on obtient $X = \begin{pmatrix} 1/2t \\ -1/2t \\ -t \\ t \end{pmatrix}$.

Ainsi, $E_{-2}(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ donc $E_{-2}(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \right)$.

• On résout l'équation $T_2 \times X = 0$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$; on obtient $X = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $E_2(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ donc $E_2(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

• On résout l'équation $T_3 \times X = 0$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$; on obtient $X = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $E_3(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ donc $E_3(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

f est diagonalisable car elle a $4 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ valeurs propres.

Exercice 4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et la matrice $M_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & 4+a \end{pmatrix}$.

1. A est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses valeurs diagonales :

$$\text{Sp}(A) = \{0; 1; 4\}$$

Puisque $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet trois valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable donc il existe P inversible (constituée d'une base de vecteurs propres de A) et D diagonale (constituée des valeurs propres associées) telles que $A = PDP^{-1}$. Par exemple, en mettant les colonnes de P dans le bon ordre, une telle matrice D est :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Trivial. On le vérifie directement par calcul matriciel.

(b) On développe l'égalité précédente, ce qui donne $(D^2 - D)(D - 4I) = 0$ i.e. $D^3 - 5D^2 + 4D = 0$ donc $D^3 = 5D^2 - 4D$.

Pour en déduire une égalité sur A , on multiplie à gauche par P et à droite par P^{-1} :

$$A^3 = PD^3P^{-1} = P(5D^2 - 4D)P^{-1} = 5A^2 - 4A.$$

(c) L'équation $B^2 = A$ est équivalente à $N^2 = D$ avec N bien choisie :

$$B^2 = A \iff B^2 = PDP^{-1} \iff P^{-1}B^2P = P^{-1}(PDP^{-1})P \iff P^{-1}BPP^{-1}BP = D \iff (P^{-1}BP)^2 = D.$$

On ne demande pas toutes les solutions, il suffit donc d'en trouver une : par commodité on la cherche diagonale et on remarque qu'en posant

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

on obtient $N^2 = D$, donc

$$B = PNP^{-1}$$

vérifie $B^2 = A$.

(d) Par une récurrence rapide et classique on obtient :

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

(e) On remarque que

$$M_a = A + aI = PDP^{-1} + aPP^{-1} = P(DP^{-1} + aP^{-1}) = P(D + aI)P^{-1}.$$

Or la matrice $D_a = D + aI$ est diagonale comme somme de deux matrices diagonales, donc c'est une solution du problème (on remarque donc que M_a est diagonalisable) :

$$D_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & 4+a \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Soient a, b et c trois réels non nuls et M la matrice carrée d'ordre 3 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{a} & 1 & \frac{b}{c} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & 1 \end{pmatrix}$$

1. On calcule sans difficulté :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1+1+1 & a/b + a/b + a/b & a/c + a/c + a/c \\ b/a + b/a + b/a & 1+1+1 & b/c + b/c + b/c \\ c/a + c/a + c/a & c/b + c/b + c/b & 1+1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3a/b & 3 \\ 3b/a & 3 & 3b/c \\ 3c/a & c/b & 3 \end{pmatrix} = 3M.$$

2. On suppose que M est inversible, alors on peut simplifier l'équation $M^2 = 3M$ par M^{-1} (en multipliant à droite par M^{-1} par exemple). On obtient donc $M^2M^{-1} = 3MM^{-1}$ donc $M = 3I$. Ce qui est absurde au vu de la matrice M .

L'hypothèse était donc fautive : M n'est pas inversible.

3. On en déduit que $M^2 - 3M = 0$, donc le polynôme $X^2 - 3X$ est annulateur de M . On cherche ses racines :

$$x^2 - 3x = 0 \iff x(x-3) = 0 \iff x \in \{0; 3\}$$

et le spectre de M est inclus, d'après une propriété du cours, dans l'ensemble des racines de son polynôme annulateur donc :

$$\text{Sp}(M) \subset \{0; 3\}.$$

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(M) & \iff MX = 0 \iff \begin{cases} x + (a/b)y + (a/c)z = 0 \\ (b/a)x + y + (b/c)z = 0 \\ (c/a)x + (c/b)y + z = 0 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} L_1 \leftarrow bcL_1 \\ L_2 \leftarrow acL_2 \\ L_3 \leftarrow abL_3L_1 \end{cases} \begin{cases} (bc)x + (ac)y + (ab)z = 0 \\ (bc)x + (ac)y + (ab)z = 0 \\ (bc)x + (ac)y + (ab)z = 0 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \begin{cases} (bc)x + (ac)y + (ab)z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff x = -(a/b)y - (a/c)z \\ & \iff X = \begin{pmatrix} -(a/b)y - (a/c)z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -a/b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -a/c \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que 0 est bien valeur propre de M car 0 n'est pas la seule solution, et :

$$E_0(M) = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} -a/b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a/c \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \right]$$

La famille $\left[\begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \right]$ est donc génératrice de $E_0(A)$. De plus elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires donc elle est libre, c'est une base de $E_0(A)$ et $\dim(E_0(A)) = 2$.

D'autre part on calcule

$$M - 3I = \begin{pmatrix} -2 & a/b & a/c \\ b/a & -2 & b/c \\ c/a & c/b & -2 \end{pmatrix}$$

et on résout :

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3(M) & \iff (M - 3I)X = 0 \iff \begin{cases} -2x + (a/b)y + (a/c)z = 0 \\ (b/a)x - 2y + (b/c)z = 0 \\ (c/a)x + (c/b)y - 2z = 0 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} L_1 \leftarrow bcL_1 \\ L_2 \leftarrow acL_2 \\ L_3 \leftarrow abL_3 \end{cases} \begin{cases} (-2bc)x + (ac)y + (ab)z = 0 \\ (bc)x + (-2ac)y + (ab)z = 0 \\ (bc)x + (ac)y + (-2ab)z = 0 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} 2L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{cases} \begin{cases} (-2bc)x + (ac)y + (ab)z = 0 \\ (-3ac)y + (3ab)z = 0 \\ (3ac)y + (-3ab)z = 0 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases} \begin{cases} (-2bc)x + (ac)y + (ab)z = 0 \\ (-3ac)y + (3ab)z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} x = (a/c)z \\ y = (b/c)z \end{cases} \iff X = z \begin{pmatrix} a/c \\ b/c \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que 3 est bien valeur propre de M car 0 n'est pas la seule solution, et :

$$E_3(M) = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} a/c \\ b/c \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right]$$

La famille $\left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right]$ est donc génératrice de $E_3(A)$. De plus elle est constituée d'un seul vecteur, non nul, donc elle est libre, c'est une base de $E_3(A)$ et $\dim(E_3(A)) = 1$.

Enfin on en déduit que la somme des dimensions des sous-espaces propres de M vaut 3, avec $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc M est diagonalisable.

4. On transforme la base de $E_0(M)$:

$$E_0(M) = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \right] = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} a \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -c \end{pmatrix} \right]$$

et la concaténation des bases des sous-espaces propres donne une famille libre dont le cardinal vaut 3, donc égal à la dimension de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$: c'est donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M : on en déduit qu'en posant

$$P = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & -b & 0 \\ c & 0 & -c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la formule de changement de base donne $M = PDP^{-1}$.

Exercice 6. 1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc :
 $f(e_1 + e_2 + e_3) = 9(e_1 + e_2 + e_3)$

2. D'après l'énoncé, $f(e_3) = 3(e_3)$ donc e_3 est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 3.
De plus, on a montré que $f(e_1 + e_2 + e_3) = 9(e_1 + e_2 + e_3)$ donc $e_1 + e_2 + e_3$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 9. En effet $e_1 + e_2 + e_3$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$ donc ne peut pas être le vecteur nul.
Enfin, $A = A - 0I$ n'est pas inversible donc 0 est valeur propre de f .
 f a 3 = $\dim(E)$ valeurs propres donc est diagonalisable.

3. On remarque que $f(e_2) = 2f(e_1) \Leftrightarrow f(e_2) - 2f(e_1) = 0 \Leftrightarrow f(e_2 - 2e_1) = 0$ (car f linéaire) donc $e_2 - 2e_1$ est un vecteur propre de f (non nul car de coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$) associé à la valeur propre 0.

La famille $\mathcal{C} = (e_2 - 2e_1, e_3, e_1 + e_2 + e_3)$ est une famille libre car constitué de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes; elle a 3 = $\dim(E)$ vecteurs donc c'est une base de E .

On pose alors $D = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ et $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ alors par formule de changement de base :

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}} = P D P^{-1}$$

Exercice 7. 1. J est symétrique donc diagonalisable et $J = J - 0I$ n'est pas inversible (car $C_3 = C_1$) donc 0 est une valeur propre de J .

2. Vérifions que les colonnes de P forment une base de vecteurs propres de J :

On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, on a :

$JX_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = -\sqrt{2}X_1$ donc X_1 est un vecteur propre de J associé à la valeur propre $-\sqrt{2}$.

$JX_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0X_2$ donc X_2 est un vecteur propre de J associé à la valeur propre 0.

$JX_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}X_3$ donc X_3 est un vecteur propre de J associé à la valeur propre $\sqrt{2}$.

Ainsi, la famille (X_1, X_2, X_3) forme une famille de 3 vecteurs propres de J , libre car associés à des valeurs propres distinctes donc une base de vecteurs de J .

Ainsi, si on pose $D = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ alors, par formule de changement de base on a

$$J = P D P^{-1} \Leftrightarrow P^{-1} J P = D$$

Exercice 8. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

1. On connaît une matrice de f , on sait que $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A)$. On cherche donc les valeurs de λ réelles

telles que $A - \lambda I$ n'est pas inversible :

$$\begin{aligned}
 A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & -1-\lambda & 0 \\ 4 & -8 & -2-\lambda \end{pmatrix} & \iff L_1 \leftrightarrow L_3 & \begin{pmatrix} 4 & -8 & -2-\lambda \\ -4 & -1-\lambda & 0 \\ 3-\lambda & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \iff \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 4L_3 - (3-\lambda)L_1 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 4 & -8 & -2-\lambda \\ 0 & -9-\lambda & -2-\lambda \\ 0 & 28-8\lambda & (3-\lambda)(2+\lambda) \end{pmatrix} \\
 & \iff L_3 \leftarrow L_3 - 8L_2 & \begin{pmatrix} 4 & -8 & -2-\lambda \\ 0 & -9-\lambda & -2-\lambda \\ 0 & 100 & (3-\lambda)(2+\lambda) + 8(2+\lambda) \end{pmatrix} \\
 & \iff L_3 \leftrightarrow L_2 & \begin{pmatrix} 4 & -8 & -2-\lambda \\ 0 & 100 & (3-\lambda)(2+\lambda) + 8(2+\lambda) \\ 0 & -9-\lambda & -2-\lambda \end{pmatrix} \\
 & \iff L_3 \leftrightarrow 100L_3 + (9+\lambda)L_2 & \begin{pmatrix} 4 & -8 & -2-\lambda \\ 0 & 100 & (3-\lambda)(2+\lambda) + 8(2+\lambda) \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

où on a :

$$\begin{aligned}
 P(\lambda) &= -100(2+\lambda) + (9+\lambda)[(3-\lambda)(2+\lambda) + 8(2+\lambda)] \\
 &= -100(2+\lambda) + (9+\lambda)(2+\lambda)(11-\lambda) \\
 &= (2+\lambda)[-100 + (9+\lambda)(11-\lambda)] \\
 &= (2+\lambda)(-100 + 99 - 9\lambda + 11\lambda - \lambda^2) \\
 &= (2+\lambda)(-\lambda^2 + 2\lambda - 1) \\
 &= -(2+\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = -(2+\lambda)(\lambda - 1)^2.
 \end{aligned}$$

et après ce moment de bravoure, on obtient donc que $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(f) = \{1; -2\}$.

Voyons à présent comment éviter ces calculs : en remarquant que la matrice $A - \lambda I$ a deux coefficients nuls au-dessus de la diagonale, on va faire apparaître les 0 au-dessus de la diagonale :

$$\begin{aligned}
 A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & -1-\lambda & 0 \\ 4 & -8 & -2-\lambda \end{pmatrix} & \iff L_1 \leftrightarrow L_2 & \begin{pmatrix} -4 & -1-\lambda & 0 \\ 3-\lambda & 1 & 0 \\ 4 & -8 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\
 & \iff L_1 \leftarrow L_1 + (1+\lambda)L_2 & \begin{pmatrix} -4 + (1+\lambda)(3-\lambda) & 0 & 0 \\ 3-\lambda & 1 & 0 \\ 4 & -8 & -2-\lambda \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

donc les valeurs propres de A sont les solutions de :

$$-4 + (1+\lambda)(3-\lambda) = -4 + 3 - \lambda + 3\lambda - \lambda^2 = -\lambda^2 + 2\lambda - 1 = -(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = -(\lambda - 1)^2 = 0$$

dont la seule solution est $\lambda = 1$, et de

$$-2 - \lambda = 0 \iff \lambda = -2$$

et on obtient donc $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(f) = \{1; -2\}$.

On détermine ensuite les sous-espaces propres associés : en posant T_λ la réduite triangulaire de

$$A - \lambda I,$$

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) &\iff T_1 X = 0 \iff \begin{cases} 0 = 0 \\ 2x + y = 0 \\ 4x - 8y - 3z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = -2x \\ z = 20/3x \end{cases} \iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 20/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc

$$E_1(A) = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 20/3 \end{pmatrix} \right] = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 20 \end{pmatrix} \right].$$

Enfin on en déduit en lisant sur la base canonique que :

$$E_1(f) = \text{Vect}(3e_1 - 6e_2 + 20e_3) = \text{Vect}[(3, -6, 20)].$$

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2}(A) &\iff T_{-2} X = 0 \iff \begin{cases} -9x = 0 \\ 5x + y = 0 \\ 4x - 8y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff X = z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc

$$E_{-2}(A) = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Enfin on en déduit en lisant sur la base canonique que :

$$E_{-2}(f) = \text{Vect}(e_3) = \text{Vect}[(0, 0, 1)].$$

2. Les deux premières équations sont la définition de vecteurs propres. Il faut donc poser (on peut multiplier si on le souhaite par une constante à chaque fois) :

$$\vec{e}_1 = (0, 0, 1) \quad \text{et} \quad \vec{e}_2 = (3, -6, 20).$$

Pour la troisième, on pose $\vec{e}_3 = (x, y, z)$ et on résout en passant par les matrices dans la base canonique :

$$f(\vec{e}_3) = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff (A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

On pose alors le système suivant :

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_3) = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 &\iff \begin{cases} 2x + y = 3 \\ -4x - 2y = -6 \\ 4x - 8y - 3z = 20 \end{cases} \\ &\iff \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix} \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 0 = 0 \\ -10y - 3z = 14 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x = 3 - y \\ 0 = 0 \\ -3z = 14 + 10y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{3-y}{2} \\ z = -\frac{14+10y}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Pour trouver une solution simple qui évite les fractions, on prend y impair pour que $3 - y$ soit divisible par 2, et tel que $14 + 10y$ soit divisible par 3 : par exemple avec $y = 1$, on trouve $x = \frac{3-1}{2} = 1$ et $z = -\frac{14+10}{3} = -8$ donc

$$\vec{e}_3 = (1, 1, -8)$$

est solution de problème. Il reste à prouver que la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$: son cardinal, qui vaut 3, est bien égal à la dimension de $\mathbb{R}^3$ donc il suffit de prouver qu'elle est libre en résolvant :

$$a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = 0 \iff \begin{cases} 3b + c = 0 \\ -6b + c = 0 \\ a + 20b - 8c = 0 \end{cases}$$

On peut remarquer que les deux premières lignes forment un système de Cramer en les inconnues b et c car les deux équations ne sont pas colinéaires : on en déduit que ce système est équivalent à :

$$a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = 0 \iff \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ a + 20 \times 0 - 8 \times 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

donc la famille est libre, c'est bien une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice T de f dans cette base vaut donc et vérifie par formule de changement de base :

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = PTP^{-1}$$

où P est la matrice de passage de la base canonique à cette nouvelle base, donc A est semblable à la matrice T qui est bien triangulaire.

Exercice 9. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. On passe par sa matrice dans la base canonique :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}[(f - \text{Id})^2] = (A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $(f - \text{Id})^2$ est bien l'application nulle.

2. Le polynôme $(X - 1)^2$ est donc annulateur de f , et la seule valeur propre possible de f est donc 1.

Supposons que f est diagonalisable, alors elle admet une matrice, dans une base de vecteurs propres, diagonale et dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres associés aux vecteurs propres de la base : c'est forcément 1 à chaque fois, donc I est une matrice représentative de f .

On en déduit alors que $f = \text{Id}$, et donc que sa matrice dans la base canonique est I : c'est absurde puisque $A \neq I$, et f n'est donc pas diagonalisable.

3. Pour obtenir une telle matrice représentative, on lit dans la base $\mathcal{B}'$ les équations :

$$f(u) = u, \quad f(v) = v, \quad f(w) = v + w.$$

On recherche pour les deux premiers vecteurs le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 :

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) &\iff (A - I)X = 0 \iff \begin{cases} 0 = 0 \\ -y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \iff y = -z \\ &\iff X = \begin{pmatrix} x \\ -z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc on peut poser :

$$u = (1, 0, 0) \quad \text{et} \quad v = (0, -1, 1).$$

On peut alors résoudre la troisième équation en posant $w = (x, y, z)$ et en passant par les matrices dans la base canonique :

$$\begin{aligned} f(w) = v + w &\iff (f - \text{id})(w) = v \iff (A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \iff \begin{cases} 0 = 0 \\ -y - z = -1 \\ y + z = 1 \end{cases} \iff y = 1 - z \\ &\iff w = (x, 1 - z, z) \end{aligned}$$

On peut pour obtenir un vecteur simple poser $x = z = 0$ et on obtient $w = (0, 1, 0)$.

Il reste à prouver que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$: comme elle a un cardinal égal à 3 donc à la dimension de $\mathbb{R}^3$, il suffit de prouver qu'elle est libre en résolvant :

$$au + bv + cw = 0 \iff \begin{cases} a = 0 \\ -b + c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0$$

donc la famille est libre et c'est bien une base de $\mathbb{R}^3$. Dans cette base, on a

$$f(u) = u, \quad f(v) = v, \quad f(w) = v + w$$

donc la matrice T de f dans la base $\mathcal{B}'$ est bien :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. D'après la formule de changement de base,

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} T P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1}$$

donc en posant $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ on obtient bien la relation demandée. Enfin on sait que

$$u = e_1, \quad v = -e_2 + e_3, \quad w = e_2$$

donc on obtient :

$$P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10.

Soit $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Pour l'image, on lit sur la matrice les images de la base canonique puis on utilise le fait que :

$$\begin{aligned} \text{Im } v &= \text{Vect}[f(e_0), f(e_1), f(e_2), f(e_3)] = \text{Vect}[2e_3, 3e_3, e_3, -e_0 + 5e_1 - 2e_2] \\ &= \text{Vect}[2X^3, 3X^3, X^3, -2X^2 + 5X - 1] = \text{Vect}[X^3, -2X^2 + 5X - 1] \end{aligned}$$

en retirant les deux premiers vecteurs qui sont colinéaires au troisième. La famille $[X^3, -2X^2 + 5X - 1]$ est donc génératrice de $\text{Im } v$, et libre car constituée de deux vecteurs qui ne sont pas colinéaires, donc c'en est une base et $\dim(\text{Im } v) = 2$.

Par théorème du rang on en déduit que $\dim(\text{Ker } v) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) - \dim(\text{Im } v) = 4 - 2 = 2$. Cherchons alors le noyau de v :

- Première méthode, très subtile et qui demande beaucoup de maîtrise, mais beaucoup plus rapide.

On remarque que puisque $\dim(\text{Ker } v) = 2$, il suffit de trouver une famille de $\text{Ker } v$ libre et composée de deux vecteurs. Il suffit donc de trouver deux vecteurs de $\text{Ker } v$ qui ne sont pas colinéaires. Or on remarque sur la matrice que :

$$v(e_0) = 2v(e_2) \quad \text{et} \quad v(e_1) = 3v(e_2)$$

donc on en déduit par linéarité de f que

$$v(e_0 - 2e_2) = v(1 - 2X^2) = 0 \quad \text{et} \quad v(e_1 - 3e_2) = v(X - 3X^2) = 0.$$

La famille $[1 - 2X^2, X - 3X^2]$ est donc une famille de $\text{Ker } v$, de cardinal 2 donc égal à la dimension de $\text{Ker } v$, et libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires : c'en est donc une base. On en déduit alors qu'elle est génératrice de $\text{Ker } v$ et on obtient une expression explicite de $\text{Ker } v$:

$$\text{Ker } v = \text{Vect}[1 - 2X^2, X - 3X^2].$$

- Deuxième méthode beaucoup plus classique : on cherche le noyau de M avec la définition du noyau, on résout donc, avec X quelconque dans $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} MX = 0 &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} -d \\ 5d \\ -2d \\ 2a + 3b + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -d = 0 \\ 5d = 0 \\ -2d = 0 \\ 2a + 3b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} d = 0 \\ c = -2a - 3b \end{cases} \\ &\iff X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -2a - 3b \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc on obtient :

$$\text{Ker } M = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ tq } a, b \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

En lisant ces vecteurs dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, on en déduit que :

$$\text{Ker } v = \text{Vect}[e_0 - 2e_2, e_1 - 3e_3] = \text{Vect}[1 - 2X^2, X - 3X^2].$$

Enfin on en déduit que $(1 - 2X^2, X - 3X^2)$ est une famille génératrice de $\text{Ker } v$, et libre car constituée de deux vecteurs qui ne sont pas colinéaires, donc c'en est une base (et on vérifie bien que $\dim(\text{Ker } v) = 2$ comme le théorème du rang nous l'avait annoncé).

Enfin on remarque que

$$\text{Ker } v = \text{Ker}(v - 0 \text{ id}) = E_0(v) \neq \{0\}$$

donc 0 est une valeur propre de v .

2. On sait que $\text{Sp}(v) = \text{Sp}(M)$; on ne dispose d'aucune information permettant de l'éviter, donc on

cherche les valeurs de λ réelles telles que $M - \lambda I$ est inversible :

$$\begin{aligned}
 M - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -\lambda & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} &\iff (L_1 \leftrightarrow L_4) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -\lambda & -2 \\ -\lambda & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 &\iff (L_4 \leftarrow 2L_4 + \lambda L_1) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -\lambda & -2 \\ 0 & 3\lambda & \lambda & -2 - \lambda^2 \end{pmatrix} \\
 &\iff (L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -\lambda & -2 \\ 0 & 0 & \lambda & 13 - \lambda^2 \end{pmatrix} \\
 &\iff (L_4 \leftarrow L_4 + L_3) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 11 - \lambda^2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Les valeurs propres de M et donc de v sont les valeurs qui annulent l'un au moins des coefficients diagonaux de cette réduite triangulaire, donc telles que :

$$-\lambda = 0 \iff \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad 11 - \lambda^2 = (\sqrt{11} - \lambda)(\sqrt{11} + \lambda) = 0 \iff \lambda \in \{-\sqrt{11}, \sqrt{11}\}.$$

On en déduit que $\text{Sp}(v) = \{-\sqrt{11}, 0, \sqrt{11}\}$. De plus $\dim(E_0(v)) = 2$ et les deux autres sous-espaces propres sont de dimension au moins 1 : on en déduit que la somme des dimensions des sous-espaces propres de v vaut au moins 4, donc v est diagonalisable (et de plus comme la somme ne peut dépasser 4, les deux autres sous-espaces propres sont de dimension égale à 1).

Exercice 11. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E dont la matrice J relativement à la base $\mathcal{B}$ est :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

J est diagonalisable car elle est symétrique, donc f est diagonalisable.

De plus on remarque que J n'est pas inversible car elle a deux colonnes égales : on en déduit que 0 est valeur propre de J donc de f .

L'image de J est engendrée par ses colonnes, et comme il y a deux fois la même, c'est l'espace engendré par les deux premières colonnes : elle ne sont pas colinéaires donc elles forment une famille libre, donc une base de $\text{Im } J$. Par théorème du rang $\text{Ker } J$ et donc $\text{Ker } f$ sont de dimension 1.

Enfin comme $C_1 = C_3$, on en déduit que $f(e_1) = f(e_3)$ donc $f(e_1 - e_3) = 0$. $(e_1 - e_3)$ est donc une famille de $\text{Ker } f$, de cardinal un qui est égal à la dimension de $\text{Ker } f$, et libre (un seul vecteur, non nul) donc c'en est une base. On en déduit que :

$$\text{Ker}(f) = E_0(f) = \text{Vect}(e_1 - e_3).$$

On remarque ensuite que $f(e_2) = 3e_2$, donc 3 est valeur propre de f et e_2 est un vecteur propre associé. En prenant

$$J - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

on remarque qu'il y a deux colonnes non colinéaires et une qui est nulle, donc que $\text{Im}(J - 3I)$ est de dimension 2 et donc par théorème du rang que $E_3(J) = \text{Ker}(J - 3I)$ et donc $E_3(f)$ sont de dimension 1. (e_2) en constitue donc une base (libre car un seul vecteur non nul, et de bon cardinal) et on obtient :

$$E_3(f) = \text{Vect}(e_2).$$

Puisque f est diagonalisable, il reste une valeur propre, et on sait déjà que son sous-espace propre est de dimension 1. On peut alors remarquer que $C_1 = C_3$ donne :

$$f(e_1) = f(e_3) \quad \text{donc} \quad f(e_1 + e_3) = 2f(e_1) = 2(e_1 + e_3)$$

Le vecteur $e_1 + e_3$ est non nul donc c'est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 2. La dernière valeur propre cherchée est donc 2, et puisque $E_2(f)$ est de dimension 1 (la somme des dimensions des sous-espaces propres de f vaut 3 puisque f est diagonalisable et c'est un endomorphisme de E qui est de dimension 3), $(e_1 + e_3)$ est une famille de $E_2(f)$, libre (un vecteur non, non nul) et de cardinal 1 égal à la dimension de $E_2(f)$, c'en est donc une base et :

$$E_2(f) = \text{Vect}(e_1 + e_3).$$

Exercice 12. 1. **Réduction simultanée :** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ admettant 3 valeurs propres distinctes a, b et c et g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui commute avec f (i.e. $g \circ f = f \circ g$). Nous allons prouver que g est diagonalisable et qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres commun à f et à g .

- (a) u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre a c-a-d $u \neq 0$ et $f(u) = au$. Montrons que $g(u)$ aussi i.e. $f(g(u)) = ag(u)$:

$$\begin{aligned} f(g(u)) &= g(f(u)) \text{ car } f \circ g = g \circ f \text{ d'après l'énoncé} \\ &= g(au) \text{ car } f(u) = au \\ &= ag(u) \text{ par linéarité de } g \end{aligned}$$

on a bien $g(u) \in E_a(f)$ c'est-à-dire, soit $g(u) = 0$, soit $g(u)$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre a .

- (b) f a autant de valeurs propres distinctes que la dimension de l'espace de départ, donc chacun des sous-espaces propres est de dimension 1.

$\dim(E_a(f)) = 1$ donc si u est un vecteur propre de f associé à a alors, comme il est non nul alors c'est une base de $E_a(f)$ i.e. $E_a(f) = \text{Vect}(u)$.

Or on a vu que $g(u) \in E_a(f) = \text{Vect}(u)$ donc il existe un réel λ tel que $g(u) = \lambda u$. u est donc aussi un vecteur propre de g (associé à une autre valeur propre indéterminée).

On remarque le raisonnement serait le même si u était un vecteur propre de f associé à une autre valeur propre (b ou c).

On a donc obtenu le résultat suivant : si u est un vecteur propre de f alors u est un vecteur propre de g .

- (c) f a $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ valeurs propres distinctes donc f est diagonalisable dans une base $\mathcal{B} = (u, v, w)$ de $\mathbb{R}^3$ constituée de 3 vecteurs propres respectivement associés à chaque valeur propre.

Or u est un vecteur propre de f donc d'après la question 1.(b), c'est aussi un vecteur propre de g . De même pour v et w . Ainsi, (u, v, w) est aussi constituée de vecteurs propres de g (et est tjrs une base de $\mathbb{R}^3$ bien sûr).

g est donc diagonalisable dans cette base.

2. **Application :** soit $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $h \circ h = f$.

- (a) $h \circ f = h \circ (h \circ h) = h \circ h \circ h = (h \circ h) \circ h = f \circ h$.

- (b) D'après la partie 1., h est diagonalisable dans une même base que f .

Il existe donc une base $\mathcal{B}$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$.

De plus, on a $h \circ h = f$ si et seulement si $\begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

Cette équation a des solutions λ, μ et γ si et seulement si a, b et c sont positives.

Exercice 13. Dans cet exercice, on note C^0 l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit Φ l'application définie sur C^0 qui, à toute fonction f de C^0 , associe la fonction $g = \Phi(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

1. Comme f est continue, elle admet une primitive F de classe C^1 et peut écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(f)(x) = F(x) - F(0)$$

qui est donc de classe C^1 , donc dérivable. De plus :

$$\Phi(f)'(x) = F'(x) = f(x).$$

2. Montrons que Φ est linéaire : pour tous $f_1, f_2 \in C^0$ et tout λ réel, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(\lambda f_1 + f_2)(x) = \int_0^x (\lambda f_1 + f_2)(t) dt = \lambda \int_0^x f_1(t) dt + \int_0^x f_2(t) dt = \lambda \Phi(f_1)(x) + \Phi(f_2)(x) = [\lambda \Phi(f_1) + \Phi(f_2)](x)$$

donc $\Phi(\lambda f_1 + f_2) = \lambda \Phi(f_1) + \Phi(f_2)$ et Φ est bien linéaire.

De plus pour tout $f \in C^0$, on a vu que $\Phi(f)$ est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$, donc $\Phi(f) \in C^0$, et Φ est bien un endomorphisme de C^0 .

3. La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle n'est pas dérivable en 0.

Or on a vu que pour tout f , $\Phi(f)$ est dérivable donc la valeur absolue ne peut être l'image d'une fonction de C^0 par Φ . Comme elle est dans l'ensemble d'arrivée C^0 , toutes les fonctions de C^0 ne sont pas atteintes par Φ qui n'est donc pas surjective.

Pour l'injectivité, cherchons le noyau de Φ en résolvant l'équation :

$$\Phi(f) = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}, \Phi(f)(x) = 0$$

Pour faire apparaître f , on dérive et on obtient :

$$\Phi(f) = 0 \implies \forall x \in \mathbb{R}, \Phi(f)'(x) = f(x) = 0 \implies f = 0$$

et on en déduit que $\text{Ker } \Phi = \{0\}$, donc Φ est injective.

4. (a) $\text{Ker } \Phi = \{0\}$ donc 0 n'est pas valeur propre de Φ .

- (b) On sait que $\Phi(f) = \lambda f$ avec $\lambda \neq 0$ et $\Phi(f)$ qui est dérivable : on isole f et on obtient :

$$f = \frac{1}{\lambda} \Phi(f) \quad \text{qui est dérivable et} \quad f'(x) = \frac{1}{\lambda} \Phi(f)'(x) = \frac{1}{\lambda} f(x).$$

- (c) Posons $g(x) = f(x)e^{-\frac{x}{\lambda}}$, cette fonction est dérivable comme produit de fonctions dérivables et :

$$g'(x) = f'(x)e^{-\frac{x}{\lambda}} - \frac{1}{\lambda} f(x)e^{-\frac{x}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda} f(x)e^{-\frac{x}{\lambda}} - \frac{1}{\lambda} f(x)e^{-\frac{x}{\lambda}} = 0$$

d'après la dérivée de f obtenue à la question 4a.

On en déduit que $g(x)$ est une constante, c'est-à-dire qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = a \quad \text{donc} \quad f(x) = g(x)e^{\frac{x}{\lambda}} = ae^{\frac{x}{\lambda}}$$

Pour calculer a , on se place en la valeur 0 : on voit que $f(x) = ae^0 = a$ donc $\Phi(f)(0) = \lambda a$, or par hypothèses :

$$\Phi(f)(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0$$

On en déduit avec $\lambda \neq 0$ que

$$\lambda a = 0 \iff a = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0e^{\frac{x}{\lambda}} = 0 \iff f = 0.$$

- (d) On vient de voir que pour tout $\lambda \neq 0$, il n'existe aucun vecteur propre associé à cette valeur de λ (un vecteur propre doit être **non nul**) donc λ n'est pas valeur propre.

Il reste le cas de la valeur propre nulle. Mais comme on sait que $E_0(\Phi) = \text{Ker}(\Phi) = \{0\}$, 0 n'est pas non plus valeur propre de Φ , qui n'admet donc aucune valeur propre.