

TD 10 : Correction

Exercice 1.

La fonction F est déjà une fonction de répartition d'après l'énoncé, il faut et il suffit donc de prouver que la variable associée est à densité, donc que F est de classe C^1 sauf peut-être en un nombre fini de points et continue sur $\mathbb{R}$.

Or sur $] -\infty; 0[$ F est constante donc de classe C^1 et sur $[0, +\infty[$, F est de classe C^1 comme composée définie de fonctions usuelles de classe C^1 , donc F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être au point de raccordement : 0.

On en déduit que F est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0, qu'on étudie : étudions la continuité à gauche en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0 \quad \text{et} \quad F(0) = (1 - e^0)^3 = (1 - 1)^3 = 0$$

donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = F(0)$$

donc F est bien continue en 0, donc sur $\mathbb{R}$ et X est une variable aléatoire à densité.

Enfin on obtient une densité de X en dérivant F sauf en 0 où on donne une valeur arbitraire, par exemple :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{3}{2} e^{-\frac{x}{2}} (1 - e^{-\frac{x}{2}})^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

est une densité de X .

Exercice 2.

- f est continue sur $] -\infty, 0[$ et $]1; +\infty[$ comme fct constante et sur $[0, 1]$ comme fonction polynômiale donc f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en 0 et en 1.
 f est positive sur $\mathbb{R}$ car pour $0 \leq x \leq 1$, $6x \geq 0$ et $1 - x \geq 0$.
Il faut ensuite que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

Or $\int_{-\infty}^0 f(t) dt$ et $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ convergent vers 0 comme intégrales de la fonction nulle.

D'autre part f est continue sur $[0; 1]$ donc $\int_0^1 f(t) dt$ n'est pas généralisée donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_0^1 6t(1-t) dt = 6 \left(\left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 - \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 \right) = 6 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{6}{6} = 1$$

donc f est bien une densité de probabilité.

- $Y(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs pour lesquelles $f(x) \neq 0$, donc ici $Y(\Omega) = [0; 1]$. On en déduit que (avant le support) pour $x < 0$:

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = 0$$

et (après le support) pour $x > 1$,

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = 1.$$

Enfin on s'intéresse aux valeurs de x dans le support : pour tout $x \in [0; 1]$,

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x 6t(1-t) dt = 0 + 6 \left(\left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x - \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^x \right) = 6 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) = 3x^2 - 2x^3.$$

On rassemble enfin les trois cas et on obtient :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 - 2x^3 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3. La variable Y est bornée, montrons qu'elle admet alors des moments de tous ordres :

Pour tout $n \geq 0$, la fonction $t \mapsto t^n f(t)$ est nulle en dehors de $[0; 1]$ et continue sur $[0; 1]$; on en déduit que les intégrales de $-\infty$ à 0 et de 1 à $+\infty$ de ces fonctions convergent absolument et valent 0, et que les intégrales sur $[0; 1]$ ne sont pas généralisées donc convergent absolument.

On en déduit finalement que Y admet des moments de tous ordres, et en particulier des moments d'ordre 1 et 2 donc une espérance et une variance. Enfin calcule :

$$E(Y) = \int_0^1 t f(t) dt = 6 \int_0^1 t^2 (1-t) dt = 6 \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} \right]_0^1 = 6 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

De même

$$E(Y^2) = \int_0^1 t^2 f(t) dt = 6 \int_0^1 t^3 (1-t) dt = 6 \left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5} \right]_0^1 = 6 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

Enfin par formule de Koenig-Huyghens on obtient :

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{6-5}{20} = \frac{1}{20}.$$

Exercice 3.

1. f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 1 : sur $] -\infty; 1[$ comme fct constante et sur $[1; +\infty[$ comme fct usuelle dont le dénominateur ne s'annule pas.
 f est positive sur $\mathbb{R}$ si $a \geq 0$,
il faut ensuite que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

Or $\int_{-\infty}^1 f(t) dt$ converge vers 0 comme intégrale de la fonction nulle.

D'autre part f est continue sur $[1; +\infty[$ donc $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ n'est généralisée qu'en $+\infty$ et on considère :

$$\int_1^x f(t) dt = \int_1^x \frac{a}{t^3} dt = a \left[\frac{t^{-2}}{-2} \right]_1^x = a \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{2}$$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$ si et seulement si $a = 2$, et dans ce cas f est bien une densité de probabilité.

2. On remarque que $X(\Omega) = [1; +\infty[$ donc pour tout $x < 1$, $F_X(x) = 0$. Ensuite pour $x \geq 1$ on calcule :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^1 0 dt + \int_1^x \frac{2}{t^2} dt = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} \right) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

d'après la question 1 (calcul de $\int_1^x f(t) dt$ en remplaçant a par sa valeur 2). On rassemble :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

3. Pour calculer des probabilités sur la variable X , on se ramène à sa fonction de répartition :

$$P(-1 < X < 3) = P(X < 3) - P(X \leq -1)$$

Or X est à densité donc $P(X < 3) = P(X \leq 3)$ et on obtient :

$$P(-1 < X < 3) = F_X(3) - F_X(-1) = 1 - \frac{1}{3^2} - 0 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

D'autre part on remarque que :

$$P(X > 2) = P(\overline{X \leq 2}) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F_X(2) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{1}{4}.$$

4. X admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ converge absolument. Or sous réserve de convergence, la relation de Chasles donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt = \int_{-\infty}^1 0 dt + \int_1^{+\infty} \frac{2}{t^2} dt$$

Or $\int_{-\infty}^1 0 dt$ converge **absolument** et vaut 0 comme intégrale de la fonction nulle d'une part, et $\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^2} dt$ est l'intégrale d'une fonction positive, donc son absolue convergence est équivalente à sa convergence ; on reconnaît une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$) donc cette intégrale est **absolument** convergente.

Enfin $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ converge absolument et X admet une espérance. De plus on la calcule en revenant à l'intégrale partielle :

$$\int_1^x \frac{2}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^x = 1 - \frac{1}{x}$$

donc

$$E(X) = \int_1^{+\infty} \frac{2}{t^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) = 2.$$

Pour la variance, on s'intéresse d'abord au moment d'ordre deux :

$\int_{-\infty}^1 t^2 f(t) dt$ converge absolument et vaut 0 comme intégrale de la fonction nulle d'une part,

et $\int_1^{+\infty} t^2 f(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{2}{t} dt$ est l'intégrale d'une fonction positive donc sa convergence absolue est équivalente à sa convergence ; or on reconnaît une intégrale de Riemann divergente donc l'intégrale ne converge pas absolument.

Enfin X n'admet pas de moment d'ordre deux, donc pas de variance.

Exercice 4.

1. Quand on ne connaît ni une densité de Y ni sa fonction de répartition, on commence par chercher sa fonction de répartition : pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$(Y \leq x) = (-2X + 3 \leq x) = (-2X \leq y - 3) = \left(X \geq \frac{3-x}{2} \right) = \left(X < \frac{3-x}{2} \right)^c$$

donc on peut calculer, avec X à densité :

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P\left(X < \frac{3-x}{2}\right) = 1 - P\left(X \geq \frac{3-x}{2}\right) = 1 - P\left(X \leq \frac{3-x}{2}\right) = 1 - F_X\left(\frac{3-x}{2}\right).$$

Or X est à densité donc F_X est de classe C^1 sauf en un nombre fini de points et continue sur $\mathbb{R}$; par opérations élémentaires c'est aussi le cas de la fonction F_Y , et Y est une variable à densité.

Enfin on obtient une densité de Y en dérivant F_Y sauf aux points où elle n'est pas C^1 où on donne une valeur arbitraire : par exemple

$$f_Y(x) = \frac{1}{2} f_X\left(\frac{3-x}{2}\right)$$

est une densité de Y .

2. Quelque soit le support de X , on remarque que $Z = e^X$ est toujours strictement positive donc $Z(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$. On en déduit que pour tout $x \leq 0$,

$$F_Z(x) = 0.$$

D'autre part pour tout $x > 0$ on a (par stricte croissance du logarithme) :

$$(Z \leq x) = (e^X \leq x) = (\ln(e^X) \leq \ln(x)) = (X \leq \ln x)$$

donc on obtient :

$$F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(X \leq \ln x) = F_X(\ln x)$$

et en rassemblant :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ F_X(\ln x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Comme F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points et continue sur $\mathbb{R}$ (car X est à densité), par opération élémentaires c'est aussi le cas de F_Z sur $\mathbb{R}_+^*$, et de manière triviale sur $\mathbb{R}_-^*$.

On en déduit que F_Z est de classe C^1 sauf peut-être en un nombre fini de points (dont 0) et continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0. Etudions la continuité en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F_Z(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} F_Z(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F_X(\ln x) = 0$$

par composée de limites, car $\ln x$ tend vers $-\infty$ et par définition d'une fonction de répartition, F_X tend vers 0 en $-\infty$.

Enfin on a $F_Z(0) = 0$ donc F_Z est bien continue en 0, donc sur $\mathbb{R}$, et Z est une variable à densité. Enfin on obtient une densité de Z en dérivant F_Z sauf aux points où elle n'est pas C^1 où on donne une valeur arbitraire, par exemple :

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} f_X(\ln x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

est une densité de Z .

3. Puisque $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$, V existe bien et $V(\Omega) = \sqrt{X(\Omega)} \subset \mathbb{R}^+$. On en déduit que pour tout $x < 0$,

$$F_V(x) = 0$$

et pour tout $x \geq 0$, on considère :

$$(V \leq x) = (\sqrt{X} \leq x) = (\sqrt{X}^2 \leq x^2) = (X \leq x^2)$$

car $\sqrt{X}$ et x sont tous deux positifs, et la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit finalement que :

$$F_V(x) = P(V \leq x) = P(X \leq x^2) = F_X(x^2).$$

et en rassemblant :

$$F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F_X(x^2) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Comme F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points et continue sur $\mathbb{R}$ (car X est à densité), par opération élémentaires c'est aussi le cas de F_V sur $\mathbb{R}_+^*$, et de manière triviale sur $\mathbb{R}_-^*$.

On en déduit que F_V est de classe C^1 sauf peut-être en un nombre fini de points (dont 0) et continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0. Etudions la continuité en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F_V(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} F_V(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F_X(x^2) = F_X(0^2) = F_X(0) = 0$$

car $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ donc $(X \leq 0) = (X = 0)$ est de probabilité nulle car X est à densité.

Enfin on a $F_V(0) = 0$ pour les mêmes raisons donc F_V est bien continue en 0, donc sur $\mathbb{R}$, et V est une variable à densité. Enfin on obtient une densité de V en dérivant F_V sauf aux points où elle n'est pas C^1 où on donne une valeur arbitraire, par exemple :

$$f_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x f_X(x^2) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

est une densité de V .

4. Quelque soit le support de X , on remarque que $U = X^2$ est toujours positive donc $U(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$. On en déduit que pour tout $x < 0$,

$$F_U(x) = 0.$$

D'autre part pour tout $x \leq 0$ on a (par stricte croissance de la racine carrée) :

$$(U \leq x) = (X^2 \leq x) = (\sqrt{X^2} \leq \sqrt{x}) = (|X| \leq \sqrt{x}) = (-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x})$$

donc on obtient :

$$F_U(x) = P(U \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = P(X \leq \sqrt{x}) - P(X < -\sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x})$$

et en rassemblant :

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Comme F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points et continue sur $\mathbb{R}$ (car X est à densité), par opération élémentaires c'est aussi le cas de F_U sur $\mathbb{R}_+^*$, et de manière triviale sur $\mathbb{R}_-^*$.

On en déduit que F_U est de classe C^1 sauf peut-être en un nombre fini de points (dont 0) et continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0. Etudions la continuité en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F_U(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F_U(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) = F_X(\sqrt{0}) - F_X(-\sqrt{0}) = F_X(0) - F_X(0) = 0.$$

Enfin on a $F_U(0) = 0$ pour les mêmes raisons donc F_U est bien continue en 0, donc sur $\mathbb{R}$, et U est une variable à densité. Enfin on obtient une densité de U en dérivant F_U sauf aux points où elle n'est pas C^1 où on donne une valeur arbitraire, par exemple :

$$f_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} f_X(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}} f_X(-\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} (f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x})) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

est une densité de U .

Exercice 5.

1. On sait que

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Par théorème de transfert, Y admet une espérance si l'intégrale suivante est absolument convergente, et son espérance est la valeur de cette intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f_X(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} 0 dt + \int_{-1}^1 |t| \times \frac{1}{2} dt + \int_1^{+\infty} 0 dt.$$

Les intégrales de la fonction nulle convergent absolument et valent 0, et la troisième intégrale converge absolument car elle n'est pas généralisée : on en déduit que Y admet bien une espérance et :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |t| dt = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^0 -t dt + \int_0^1 t dt \right) = \frac{1}{2} \left(-\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-\left[0 - \frac{(-1)^2}{2}\right] + \frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Pour déterminer la loi de Y , on cherche son support, puis sa fonction de répartition, pour en déduire ensuite une densité de Y .

Comme $X(\Omega) = [-1; 1]$, on a $Y(\Omega) = |X|(\Omega) = [0; 1]$. On en déduit que :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Enfin pour $x \in [0; 1]$ on a :

$$(Y \leq x) = (|X| \leq x) = (-x \leq X \leq x)$$

donc comme X est à densité

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(-x \leq X \leq x) = P(X \leq x) - P(X < -x) = F_X(x) - F_X(-x)$$

Or $x \in [0; 1]$ donc x et $-x$ sont éléments de $[-1; 1]$, on peut donc obtenir :

$$F_Y(x) = \frac{x+1}{2} - \frac{-x+1}{2} = \frac{x+1+x-1}{2} = \frac{2x}{2} = x.$$

On obtient finalement :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

et on reconnaît la loi uniforme sur $[0; 1]$.

Enfin on en déduit par le cours que $E(Y) = \frac{1}{2}$, ce qui confirme le premier résultat obtenu par le théorème de transfert.

2. Par théorème de transfert, Z admet une espérance si l'intégrale suivante est absolument convergente, et son espérance est la valeur de cette intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^t f_X(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} 0 dt + \int_{-1}^1 e^t \times \frac{1}{2} dt + \int_1^{+\infty} 0 dt.$$

Les intégrales de la fonction nulle convergent absolument et valent 0, et la troisième intégrale converge absolument car elle n'est pas généralisée : on en déduit que Z admet bien une espérance et :

$$E(Z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^t dt = \frac{1}{2} [e^t]_{-1}^1 = \frac{1}{2} (e^1 - e^{-1}) = \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{e^2 - 1}{e} = \frac{e^2 - 1}{2e}.$$

Déterminons le support de Z :

$$X(\Omega) = [-1; 1] \quad \text{donc} \quad (e^X)(\Omega) = Z(\Omega) = [e^{-1}; e].$$

On en déduit que :

$$\forall x \leq e^{-1}, F_Z(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \geq e, F_Z(x) = 1.$$

Enfin pour tout $x \in [e^{-1}; e]$,

$$(Z \leq x) = (e^X \leq x) = (X \leq \ln x)$$

car $x > 0$ donc on peut bien composer par $\ln$, qui est strictement croissante. On en déduit que :

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= P(Z \leq x) = P(X \leq \ln(x)) = F_X(\ln x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ln x < -1 \iff x < 1/e \\ \frac{\ln x + 1}{2} & \text{si } -1 \leq \ln x \leq 1 \iff 1/e \leq x \leq e \\ 1 & \text{si } \ln x > 1 \iff x > e \end{cases} \\ &= \frac{\ln x + 1}{2} \quad \text{car } e^{-1} \leq \ln x \leq e \end{aligned}$$

Enfin en rassemblant on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1/e \\ \frac{\ln x + 1}{2} & \text{si } 1/e \leq x \leq e \\ 1 & \text{si } x > e \end{cases}$$

On obtient une densité de Z en dérivant sa fonction de répartition sauf aux points (en nombre fini) où elle n'est pas dérivable et où on donne une valeur arbitraire positive donc par exemple :

$$f_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1/e \\ \frac{1}{2t} & \text{si } 1/e \leq t \leq e \\ 0 & \text{si } t > e \end{cases}$$

Enfin puisqu'on dispose d'une densité de Z , on peut essayer de recalculer son espérance en revenant à la définition : on s'intéresse à l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Z(t) dt = \int_{-\infty}^{1/e} 0 dt + \int_{1/e}^e \frac{1}{2} dt + \int_e^{+\infty} 0 dt.$$

Les intégrales de la fonction nulle convergent absolument et valent 0, et la troisième intégrale converge absolument car elle n'est pas généralisée : on en déduit que Z admet bien une espérance et :

$$E(Z) = \frac{1}{2} \int_{1/e}^e dt = \frac{1}{2} [t]_{1/e}^e = \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right) = \frac{e^2 - 1}{2e}.$$

Exercice 6.

1. (a) Tout d'abord on sait que $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$ donc $Y(\Omega) = \sqrt{X}(\Omega) = \mathbb{R}_+$ et pour tout $x < 0$,

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = 0.$$

De plus pour tout $x \geq 0$,

$$(Y \leq x) = (\sqrt{X} \leq x) = (X \leq x^2)$$

en composant par la fonction carré croissante sur $\mathbb{R}_+$, avec $\sqrt{X} \geq 0$ et $x \geq 0$. D'où

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(X \leq x^2) = F_X(x^2) = 1 - e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Finalement on en déduit que

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{2}x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Cette fonction est de classe C^1 donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 car les deux parties sont de classe C^1 , étudions la continuité en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F_Y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} F_Y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - e^{-\frac{1}{2}x^2} = 1 - e^0 = 0$$

et $F_Y(0) = 1 - e^0 = 0$ donc F_Y est continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}$, et Y est une variable aléatoire à densité. On obtient une densité de Y en dérivant F_Y sauf en 0 où on donne une valeur arbitraire, par exemple :

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x e^{-\frac{1}{2}x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

est une densité de Y .

- (b) Puisqu'on connaît la loi de Y , on va essayer d'utiliser la définition de l'espérance. Mais en cas d'impossibilité de calcul, on essaiera le théorème de transfert avec l'écriture $Y = \sqrt{X}$: on considère l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

La première intégrale converge absolument comme intégrale de la fonction nulle.

Pour la seconde, on reconnaît, à quelques différences à gérer, le moment d'ordre deux de la loi normale centrée réduite. C'est donc une intégrale absolument convergente, et Y admet bien une espérance. De plus par parité de la fonction $x \mapsto x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$ on a :

$$E(Y) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2} \times \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} E(U^2)$$

où U suit la loi normale centrée réduite, donc par formule de Koenig-Huyghens :

$$E(U^2) = V(U) + [E(U)]^2 = 1 + 0^2 = 1$$

et enfin :

$$E(Y) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

On s'intéresse alors au moment d'ordre 2 de Y donc à l'espérance de Y^2 : on a le choix entre utiliser la loi de Y ou se ramener à X en écrivant $Y^2 = (\sqrt{X})^2 = X$.

On choisit bien sûr la deuxième possibilité : $Y^2 = X$ suit la loi exponentielle de paramètre 2 donc elle admet une espérance et :

$$E(Y^2) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

On en déduit que Y admet une variance et par formule de Koenig-Huyghens :

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 2 - \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right)^2 = 2 - \frac{2\pi}{4} = 2 - \frac{\pi}{2} = \frac{4 - \pi}{2}.$$

2. Tout d'abord on sait que $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$ donc $Z(\Omega) = X^2(\Omega) = \mathbb{R}_+$ et pour tout $x < 0$,

$$F_Z(x) = P(Z \leq x) = 0.$$

De plus pour tout $x \geq 0$,

$$(Z \leq x) = (X^2 \leq x) = (\sqrt{X^2} \leq \sqrt{x}) = (|X| \leq \sqrt{x}) = (-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x})$$

en composant par la fonction racine carré croissante sur $\mathbb{R}_+$. D'où

$$F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = P(X \leq \sqrt{x}) - P(X < -\sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) = 1 - e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}} - 0.$$

Finalement on en déduit que

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Cette fonction est de classe C^1 donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 car les deux parties sont de classe C^1 , étudions la continuité en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F_Z(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} F_Z(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}} = 1 - e^0 = 0$$

et $F_Z(0) = 1 - e^0 = 0$ donc F_Z est continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}$, et Z est une variable aléatoire à densité. On obtient une densité de Z en dérivant F_Z sauf en 0 où on donne une valeur arbitraire, par exemple :

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{4\sqrt{x}} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

est une densité de Z .

Exercice 7.

1. D'après un théorème du cours, on sait que toute fonction affine d'une loi uniforme suit une loi uniforme. Cherchons son support :

$$U(\Omega) = [0; 1] \quad \text{donc} \quad V(\Omega) = (1 - U)(\Omega) = [0; 1]$$

et V suit donc la loi uniforme $\mathcal{U}_{[0;1]}$.

Si on n'a pas repéré ce théorème, on revient à la méthode classique : comme $V(\Omega) = [0; 1]$,

$$F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

et pour $x \in [0; 1]$ on a :

$$(V \leq x) = (1 - U \leq x) = (-U \leq x - 1) = (U \geq 1 - x) = \overline{(U < 1 - x)}$$

donc on en déduit que :

$$F_V(x) = P(V \leq x) = 1 - P(U < 1 - x) = 1 - F_U(1 - x)$$

et comme $x \in [0; 1]$, $1 - x \in [0; 1]$ et enfin :

$$F_V(x) = 1 - (1 - x) = x$$

donc en rassemblant

$$F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

et V suit bien $\mathcal{U}_{[0;1]}$.

2. On a vu que $(1 - U)(\Omega) = [0; 1]$, donc $\ln(1 - U)(\Omega) =] - \infty; 0]$ puis $-\frac{\ln(1 - U)}{\lambda}(\Omega) = X(\Omega) = [0; +\infty[$.

On en déduit que pour tout $x < 0$,

$$F_X(x) = 0$$

et pour tout $x \geq 0$,

$$(X \leq x) = \left(-\frac{\ln(1 - U)}{\lambda} \leq x \right) = (\ln(1 - U) \geq -\lambda x) = (1 - U \geq e^{-\lambda x}) = (-U \geq e^{-\lambda x} - 1) = (U \leq 1 - e^{-\lambda x}).$$

On en déduit que

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(U \leq 1 - e^{-\lambda x}) = F_U(1 - e^{-\lambda x})$$

Or on sait que $x \geq 0$, donc $-\lambda x \leq 0$, donc $0 < e^{-\lambda x} \leq 1$ et enfin :

$$-1 \leq -e^{-\lambda x} \leq 0 \quad \text{donc} \quad 0 \leq 1 - e^{-\lambda x} \leq 1$$

et en utilisant $F_U(u) = u$ sur cet intervalle on en déduit que :

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

puis en rassemblant :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

donc $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

3. On en déduit qu'on simule U , et même $1 - U$, avec `rand()` donc que la loi exponentielle de paramètre λ peut être simulée en faisant :

`x=-log(1-rand())/lambda`

ou même avec

`x=-log(rand())/lambda`

Exercice 8.

1. Puisque $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$ et qu'elles sont indépendantes, la plus grande des deux (et la plus petite) prendra des valeurs dans $\mathbb{R}_+$ donc $U(\Omega) = \mathbb{R}_+$.

On en déduit que pour tout $x < 0$, $F_U(x) = 0$ et pour tout $x \geq 0$,

$$(U \leq x) = [\sup(X, Y) \leq x] = (X \leq x) \cap (Y \leq x)$$

donc par indépendance de X et Y :

$$F_U(x) = P(U \leq x) = P(X \leq x)P(Y \leq x) = F_X(x)F_Y(x) = (1 - e^{-\lambda x})^2.$$

On obtient donc en rassemblant

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-\lambda x})^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Cette fonction est de classe C^1 donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 car les deux parties sont de classe C^1 , on étudie la continuité du raccordement :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F_U(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} F_U(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - e^{-\lambda x})^2 = (1 - e^0)^2 = 0$$

et $F_U(0) = (1 - e^0)^2 = 0$ donc F_U est continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$, et U est une variable à densité. Enfin on obtient une densité de U en dérivant F_U sauf en 0 où on donne une valeur arbitraire : par exemple

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

est une densité de U .

2. Puisque $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$ et qu'elles sont indépendantes, la plus petite des deux (et la plus grande) prendra des valeurs dans $\mathbb{R}_+$ donc $V(\Omega) = \mathbb{R}_+$.

On en déduit que pour tout $x < 0$, $F_V(x) = 0$ et pour tout $x \geq 0$,

$$(V > x) = (\inf(X, Y) > x) = (X > x) \cap (Y > x)$$

donc par indépendance de X et Y :

$$\begin{aligned} F_U(x) &= P(U \leq x) = 1 - P(U > x) = 1 - P(X > x)P(Y > x) = 1 - [1 - F_X(x)][1 - F_Y(x)] \\ &= 1 - (1 - [1 - e^{-\lambda x}])^2 = 1 - e^{-2\lambda x}. \end{aligned}$$

On obtient donc en rassemblant

$$F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-2\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

donc V suit la loi exponentielle de paramètre 2λ .

On en déduit que V admet une espérance et une variance et que :

$$E(V) = \frac{1}{2\lambda} \quad \text{et} \quad V(V) = \frac{1}{(2\lambda)^2} = \frac{1}{4\lambda^2}.$$

3. L'une des deux vaut forcément X et l'autre Y , donc

$$U + V = X + Y.$$

On en déduit par linéarité de l'espérance que U admet une espérance et :

$$E(U) = E(X + Y - U) = E(X) + E(Y) - E(V) = \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2\lambda}.$$

Exercice 9.

1. $([U = 1], [U = -1])$ est un système complet d'évènements donc les probabilités totales donnent :

$$P(Y \leq x) = P([U = 1] \cap [UX \leq x]) + P([U = -1] \cap [UX \leq x])$$

puis

$$P(Y \leq x) = P([U = 1] \cap [X \leq x]) + P([U = -1] \cap [X \geq -x]).$$

Par indépendance de X et U on obtient alors :

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(U = 1)P(X \leq x) + P(U = -1)P(X \geq -x) = \frac{1}{2}P(X \leq x) + \frac{1}{2}P(X \geq -x)$$

2. On en déduit que :

$$F_Y(x) = \frac{1}{2}\Phi(x) + \frac{1}{2}(1 - \Phi(-x)) = \frac{1}{2}(\Phi(x) + 1 - (1 - \Phi(x))) = \Phi(x)$$

donc Y suit la loi normale centrée réduite.

3. On calcule

$$E(U) = 1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} = 0$$

On a de plus

$$XY = XUX = UX^2$$

Or U et X sont indépendantes, donc U et X^2 aussi et admettent des espérances (la première est finie, le second car c'est le moment d'ordre deux d'une loi normale, qui existe), et on a alors :

$$E(XY) = E(U)E(X^2) = 0$$

4. Par formule de Koenig-Huyghens,

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0 \times 0 = 0$$

Exercice 10.

1. On sait que $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$ donc $Y(\Omega) = \lfloor X \rfloor(\Omega) = \mathbb{N}$.

Pour $k = 0$ on a

$$(Y = 0) = (0 \leq X < 1)$$

donc

$$P(Y = 0) = P(0 \leq X < 1) = P(X < 1) - P(X < 0) = F_X(1) - F_X(0) = 1 - e^{-1} - (1 - e^0) = 1 - e^{-1}$$

De même pour $k = 1$ on a

$$(Y = 1) = (1 \leq X < 2)$$

donc

$$P(Y = 1) = P(1 \leq X < 2) = P(X < 2) - P(X < 1) = F_X(2) - F_X(1) = 1 - e^{-2} - (1 - e^{-1}) = e^{-1} - e^{-2}$$

De même pour k quelconque dans $\mathbb{N}$, on a :

$$(Y = k) = (k \leq X < k + 1)$$

donc

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= P(k \leq X < k + 1) = P(X < k + 1) - P(X < k) = F_X(k + 1) - F_X(k) = 1 - e^{-(k+1)} - (1 - e^{-k}) \\ &= e^{-k} - e^{-(k+1)} = e^{-k}(1 - e^{-1}). \end{aligned}$$

2. Tout d'abord $(Y + 1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

De plus pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(Y + 1 = n) = P(Y = n - 1) = e^{-(n-1)}(1 - e^{-1}) = (e^{-1})^{n-1}(1 - e^{-1}).$$

Donc $Y + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - e^{-1})$ admet une espérance et une variance, et par linéarité de l'espérance et propriétés de la variance Y également et :

$$E(Y + 1) = \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{e}{e - 1} \quad \text{donc} \quad E(Y) = E(Y + 1) - 1 = \frac{e - (e - 1)}{e - 1} = \frac{1}{e - 1}$$

et

$$V(Y) = V(Y + 1) = \frac{\frac{1}{e}}{(1 - \frac{1}{e})^2} = \frac{\frac{1}{e}}{(\frac{e-1}{e})^2} = \frac{e}{(e - 1)^2}.$$

3. On définit maintenant la partie décimale de X par : $D = X - \lfloor X \rfloor$.

(a) On cherche $D(\Omega)$ et on remarque que comme la partie entière vérifie toujours :

$$\lfloor X \rfloor \leq X < \lfloor X \rfloor + 1$$

alors en retirant $\lfloor X \rfloor$ on obtient :

$$0 \leq X - \lfloor X \rfloor = D < 1$$

donc $D(\Omega) = [0; 1[$. On en déduit que

$$F_D(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

(b) Commençons par l'exemple : $(D \leq 1/3)$ signifie que $X - \lfloor X \rfloor \leq 1/3$, donc $X \leq \lfloor X \rfloor + 1/3$.

Comme $\lfloor X \rfloor$ peut prendre n'importe quelle valeur de $\mathbb{N}$, on remarque que X est donc comprise entre un entier (sa partie entière) et cet entier plus $1/3$ ce qui donne :

$$(D \leq 1/3) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (n \leq X \leq n + 1/3)$$

Pour t quelconque entre 0 et 1, on fait le même raisonnement en remplaçant $1/3$ par t , et on obtient :

$$(D \leq t) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (n \leq X \leq n + t).$$

(c) Par incompatibilité de la réunion on obtient :

$$P(D \leq t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(n \leq X \leq n + t)$$

Calculons la probabilité :

$$\begin{aligned} P(n \leq X \leq n + t) &= P(X \leq n + t) - P(X < n) = F_X(n + t) - F_X(n) = 1 - e^{-(n+t)} - (1 - e^{-n}) \\ &= e^{-n} - e^{-n-t} = e^{-n}(1 - e^{-t}) \end{aligned}$$

donc

$$P(D \leq t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}(1 - e^{-t}) = (1 - e^{-t}) \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-1})^n$$

Or comme $-1 < 0$, $0 < e^{-1} < e^0 = 1$ donc on reconnaît une série géométrique de paramètre e^{-1} absolument convergente et :

$$P(D \leq t) = (1 - e^{-t}) \times \frac{1}{1 - e^{-1}} = \frac{1 - e^{-t}}{1 - e^{-1}}.$$

(d) En rassemblant les cas on obtient :

$$F_D(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1 - e^{-t}}{1 - e^{-1}} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

Cette fonction est de classe C^1 donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 et 1 car les trois parties de la fonction sont C^1 , étudions la continuité des raccordements :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F_D(t) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} F_D(t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-t}}{1 - e^{-1}} = \frac{1 - e^0}{1 - e^{-1}} = 0$$

et $F_D(0) = \frac{1 - e^0}{1 - e^{-1}} = 0$ donc F_D est continue en 0, puis

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F_D(t) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} F_D(t) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - e^{-t}}{1 - e^{-1}} = \frac{1 - e^{-1}}{1 - e^{-1}} = 1$$

et $F_D(1) = 1$ donc F_D est continue en 1, donc sur $\mathbb{R}$, et D est une variable à densité. On obtient une densité de D en dérivant F_D sauf en 0 et 1 où on donne des valeurs arbitraires, par exemple

$$f_D(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{e^{-t}}{1-e^{-1}} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

est une densité de D .

Exercice 11. Utilisation des tables de la loi normale centrée réduite

1. On se ramène à Φ sur $\mathbb{R}_+$ qui est la partie tabulée :

$$P(X \leq -0,81) = \Phi(-0,81) = 1 - \Phi(0,81) = 1 - 0,7910 = 0,2090$$

et

$$\begin{aligned} P(|X| \leq 1,17) &= P(-1,17 \leq X \leq 1,17) = P(X \leq 1,17) - P(X < -1,17) = \Phi(1,17) - \Phi(-1,17) \\ &= \Phi(1,17) - [1 - \Phi(1,17)] = 2\Phi(1,17) - 1 = 2 \times 0,8790 - 1 = 1,7580 - 1 = 0,7580. \end{aligned}$$

2. On se ramène à une équation sur Φ :

$$P(|X| < t) = P(-t \leq X \leq t) = P(X \leq t) - P(X < -t) = \Phi(t) - \Phi(-t) = \Phi(t) - [1 - \Phi(t)] = 2\Phi(t) - 1$$

donc on veut résoudre l'équation :

$$2\Phi(t) - 1 = 0,95 \iff \Phi(t) = \frac{0,95 + 1}{2} = 0,975.$$

La table de la loi nous donne alors :

$$t = 1,96.$$

3. Pour se ramener à la loi normale centrée réduite, on fait apparaître

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} = \frac{X - 8}{\sqrt{4}} = \frac{X - 8}{2}$$

qui suit la loi normale centrée réduite. On écrit alors :

$$\begin{aligned} P(X > 8,5) &= P(X - 8 > 0,5) = P\left(\frac{X - 8}{2} > 0,25\right) = P(X^* > 0,25) = 1 - P(X^* \leq 0,25) \\ &= 1 - \Phi(0,25) = 1 - 0,5987 = 0,4013. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} P(6,5 < X < 10) &= P(-1,5 < X - 8 < 2) = P\left(-0,75 < \frac{X - 8}{2} < 1\right) = P(-0,75 < X^* < 1) \\ &= P(X^* < 1) - P(X^* \leq -0,75) = \Phi(1) - \Phi(-0,75) = \Phi(1) - [1 - \Phi(0,75)] \\ &= \Phi(1) + \Phi(0,75) - 1 = 0,8413 + 0,7734 - 1 = 1,6147 - 1 = 0,6147. \end{aligned}$$

Enfin

$$P_{[X > 5]}(X > 6) = \frac{P([X > 5] \cap [X > 6])}{P(X > 5)} = \frac{P(X > 6)}{P(X > 5)}.$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned} P(X > 6) &= P(X - 8 > -2) = P\left(\frac{X - 8}{2} > -1\right) = P(X^* > -1) = 1 - P(X^* \leq -1) \\ &= 1 - \Phi(-1) = 1 - [1 - \Phi(1)] = \Phi(1) = 0,8413. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(X > 5) &= P(X - 8 > -3) = P\left(\frac{X - 8}{2} > -1,5\right) = P(X^* > -1,5) = 1 - P(X^* \leq -1,5) \\ &= 1 - \Phi(-1,5) = 1 - [1 - \Phi(1,5)] = \Phi(1,5) = 0,9332. \end{aligned}$$

et on en déduit finalement :

$$P_{[X>5]}(X > 6) = \frac{0,8413}{0,9332}.$$

4. On pose m et V l'espérance et la variance de X et on va chercher deux équations sur ces deux inconnues :

$$P(X < -1) = P(X - m < -1 - m) = P\left(\frac{X - m}{\sqrt{V}} < \frac{-1 - m}{\sqrt{V}}\right) = P\left(X^* < \frac{-1 - m}{\sqrt{V}}\right) = \Phi\left(\frac{-1 - m}{\sqrt{V}}\right).$$

On en déduit que $\Phi\left(\frac{-1 - m}{\sqrt{V}}\right) = 0,025$ et comme cette valeur de Φ est inférieure à 0,5, la valeur où elle est prise est négative. Pour résoudre l'équation $\Phi(t) = 0,025$, on pose alors :

$$\Phi(t) = 0,025 \iff 1 - \Phi(t) = 0,975 \iff \Phi(-t) = \Phi(1,96) \iff -t = 1,96 \iff t = -1,96$$

et enfin on en déduit que :

$$-\frac{1 + m}{\sqrt{V}} = -1,96 \iff \frac{1 + m}{\sqrt{V}} = 1,96 \iff 1 + m = 1,96\sqrt{V}.$$

Ensuite la deuxième probabilité donne :

$$\begin{aligned} P(X > 3) &= P(X - m > 3 - m) = P\left(\frac{X - m}{\sqrt{V}} > \frac{3 - m}{\sqrt{V}}\right) = P\left(X^* > \frac{3 - m}{\sqrt{V}}\right) \\ &= 1 - P\left(X^* \leq \frac{3 - m}{\sqrt{V}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{3 - m}{\sqrt{V}}\right). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$1 - \Phi\left(\frac{3 - m}{\sqrt{V}}\right) = 0,242 \iff \Phi\left(\frac{3 - m}{\sqrt{V}}\right) = 1 - 0,242 = 0,758 = \Phi(0,7) \iff \frac{3 - m}{\sqrt{V}} = 0,7 \iff 3 - m = 0,7\sqrt{V}.$$

On obtient alors le système :

$$\begin{cases} m - 1,96\sqrt{V} = -1 \\ -m - 0,7\sqrt{V} = -3 \end{cases} \iff (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \begin{cases} m - 1,96\sqrt{V} = -1 \\ -2,66\sqrt{V} = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{V} = \frac{m - 1 + 1,96 \times \frac{3}{2}}{2,66} = \frac{4}{8/3} = \frac{4 \times 3}{8} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

et finalement on obtient :

$$\begin{cases} m = 1,94 \\ V = \frac{9}{4} = 2,25 \end{cases}$$

Exercice 12.

1. L'intégrale n'est généralisée qu'en $+\infty$ car la fonction intégrée est continue sur $[0; +\infty[$, et la fonction intégrée est positive. On utilise alors un théorème de comparaison, et après l'échec de l'équivalent on va tenter la négligeabilité devant $\frac{1}{x^2}$ pour obtenir la convergence à l'aide de l'exponentielle :

Au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{x^n e^{-\lambda x}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{x^{n+2}}{e^{\lambda x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{donc} \quad x^n e^{-\lambda x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} du$ est l'intégrale d'une fonction positive et converge donc par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale I_n converge pour tout n .

2. On a

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda}$$

car on reconnaît la densité d'une loi exponentielle de paramètre λ .

3. Effectuons une intégration par parties dans $\int_0^y e^{-\lambda x} x^n dx$.

On pose

$$u = e^{-\lambda x} \quad \text{et} \quad v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec

$$u' = -\lambda e^{-\lambda x} \quad \text{et} \quad v' = x^n.$$

En intégrant par parties on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^y e^{-\lambda x} x^n dx &= \left[e^{-\lambda x} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^y + \lambda \int_0^y e^{-\lambda x} \frac{x^{n+1}}{n+1} dx = e^{-\lambda y} \frac{y^{n+1}}{n+1} + \frac{\lambda}{n+1} \int_0^y e^{-\lambda x} x^{n+1} dx \\ &\xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0 + \frac{\lambda}{n+1} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} x^{n+1} dx \end{aligned}$$

par croissances comparées. On en déduit que

$$I_n = \frac{\lambda}{n+1} I_{n+1}$$

et enfin en remplaçant n par $n-1$:

$$\forall n \geq 1, \quad I_{n-1} = \frac{\lambda}{n} I_n \iff I_n = \frac{n}{\lambda} I_{n-1}.$$

4. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \frac{n}{\lambda} I_{n-1} = \frac{n}{\lambda} \times \frac{n-1}{\lambda} I_{n-2} = \dots = \frac{n}{\lambda} \times \frac{n-1}{\lambda} \times \dots \times \frac{2}{\lambda} \times \frac{1}{\lambda} I_0 = \frac{n!}{\lambda^n} \times \frac{1}{\lambda} = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}.$$

5. Le moment d'ordre n de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ est l'intégrale λI_n , qui est convergente puisque I_n est convergente. De plus cette intégrale vaut :

$$E(X^n) = \lambda I_n = \frac{n!}{\lambda^n}$$

De plus on en déduit par formule de Koenig-Huyghens que :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Exercice 13.

1. L'intégrale est généralisée seulement en $+\infty$, et on ne demande pas sa valeur, et la fonction intégrée est positive. On utilise alors le théorème de comparaison en $+\infty$.

La recherche d'un équivalent plus simple en $+\infty$ échoue : pas de somme à factoriser et pas de DL connu non plus. On passe alors par la négligeabilité devant $\frac{1}{x^2}$:

$$\frac{x^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{\frac{1}{x^2}} = x^{n+2} e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2} + (n+2) \ln(x)} = e^{x^2 \left(-\frac{1}{2} + (n+2) \frac{\ln x}{x^2} \right)}$$

Or par croissances comparées on sait que $\frac{\ln x}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc par somme, produit et composée on obtient au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{x^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{\frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{donc} \quad x^n e^{-\frac{x^2}{2}} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Enfin l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est l'intégrale d'une fonction positive et converge donc par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ converge également.

2. La fonction $x \mapsto x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$ est paire si n est pair, et impaire si n l'est ; dans tous les cas on en déduit que I_n converge.

De plus lorsque n est impair, on en déduit également que :

$$I_n = 0.$$

3. (a) On pose $J_{2k}(a) = \int_0^a x^{2k} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
On intègre par parties : on pose

$$u(x) = x^{2k-1} \quad \text{et} \quad v(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}}$$

qui sont de classe C^1 sur $[0; a]$ ou $[a; 0]$, avec

$$u'(x) = (2k-1)x^{2k-2} \quad \text{et} \quad v'(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

On en déduit que

$$J_{2k}(a) = \left[-x^{2k-1} e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^a + \int_0^a (2k-1)x^{2k-2} e^{-\frac{x^2}{2}} = -a^{2k-1} e^{-\frac{a^2}{2}} + (2k-1)J_{2k-2}(a).$$

- (b) On fait tendre a vers $+\infty$ dans la relation précédente, on reconnaît deux intégrales convergentes et sur le même modèle qu'à la question 1), on prouve que $a^{n-1} e^{-\frac{a^2}{2}}$ converge vers 0 donc :

$$\int_0^{+\infty} x^{2k} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = (2k-1) \int_0^{+\infty} x^{2k-2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Enfin par parité on obtient la même relation pour les intégrales de $-\infty$ à 0 (en remarquant que $2k$ et $2k-2$ sont tous les deux pairs) puis en utilisant la relation de Chasles on en déduit :

$$I_{2k} = (2k-1)I_{2k-2}$$

- (c) Montrons par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!} I_0$:

— **Initialisation** : Pour $k = 0$,

$$\frac{(2 \times 0)!}{2^0 0!} I_0 = \frac{0!}{1 \times 1} I_0 = 1 I_0 = I_0$$

donc la propriété est vraie au rang $k = 0$.

— **Hérédité** : Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $I_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!} I_0$, alors :

$$\begin{aligned} I_{2k+2} &= I_{2(k+1)} = [2(k+1) - 1] I_{2(k+1)-2} = (2k+1) I_{2k} = \frac{(2k+1) \times (2k)!}{2^k k!} I_0 \\ &= \frac{(2k+1)!}{2^k k!} I_0 = \frac{(2k+2) \times (2k+1)!}{(2k+2) 2^k k!} I_0 = \frac{(2k+2)!}{2(k+1) \times 2^k k!} = \frac{(2[k+1])!}{2^{k+1} (k+1)!} I_0. \end{aligned}$$

et la propriété est encore vraie au rang $k+1$.

— **Conclusion** : pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$I_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!} I_0.$$

- (d) Le moment d'ordre n de la loi normale centrée réduite est :

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I_n.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ impair,

$$E(X^n) = 0$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$ pair, on a $n = 2k$ donc :

$$E(X^n) = E(X^{2k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{(2k)!}{2^k k!} I_0 = \frac{(2k)!}{2^k k!} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I_0 = \frac{(2k)!}{2^k k!} E(X^0) = \frac{(2k)!}{2^k k!} E(1) = \frac{(2k)!}{2^k k!}.$$