Contrôle **Durée : 55 min**

Limites et études de fonctions

Calculatrice autorisée.

Exercice 1

Dans chacune des questions, on **interprètera graphiquement le résultat**.

1. Calculer la limite en 5 de la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$ par :
$$f(x) = \frac{-2x+3}{5-x}$$
2. Calculer la limite en $-\infty$ de la fonction g définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
$$g(x) = \mathrm{e}^x(x+4)$$
3. Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction h définie pour tout $x \in [0\,;+\infty[$ par :
$$h(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x+1}}{x+3}$$

Solution

1. **Limite en 5 :**

   Étudions tout d'abord le signe du dénominateur $5-x$:

   - 5-x $= 0 \iff x = 5$
   - 5-x $> 0 \iff -x > -5 \iff x < 5$

   On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$5-x$		$+$	0	$-$	

   De plus, $\lim\limits_{x\to 5}(-2x+3) = -2\times 5+3 = -7$.

   D'après le tableau de signes, $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\x<5}}(5-x) = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\x>5}}(5-x) = 0^-$.

   Par quotient :
$$\lim_{\substack{x\to 5\\x<5}} f(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to 5\\x>5}} f(x) = +\infty$$

   Interprétation graphique : La droite d'équation $x = 5$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de f.

2. **Limite en $-\infty$:**

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x\mathrm{e}^x + 4\mathrm{e}^x$.

   Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$

   De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.

   donc par somme :
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$$

   Interprétation graphique : La droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est une **asymptote horizontale** à la courbe de g en $-\infty$.

3. **Limite en $+\infty$:**

Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$h(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x+1}}{2x+1} \times \frac{2x+1}{x+3}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1) = +\infty$ et par croissances comparées, $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$, donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{2x+1}}{2x+1} = +\infty$.
- Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$\frac{2x+1}{x+3} = \frac{x\left(2+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{3}{x}\right)} = \frac{2+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{3}{x}}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x} = 0$, on a par somme et quotient :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x+3} = 2$$

Par produit des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

Interprétation graphique : La courbe représentative de h ne possède pas d'asymptote horizontale en $+\infty$.

Exercice 2

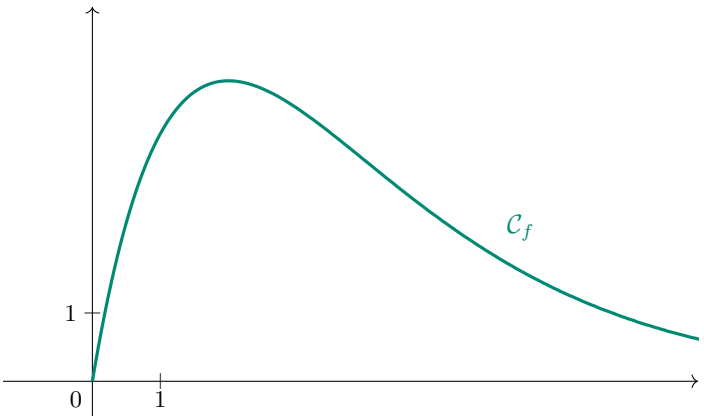
Dans le cadre du suivi d'un traitement antalgique administré à un patient, on étudie la concentration du principe actif dans le sang. Après l'injection initiale à l'instant $t = 0$, la concentration est mesurée en milligrammes par litre ($\mathrm{mg}\cdot\mathrm{L}^{-1}$) en fonction du temps écoulé t, exprimé en heures, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$.

Partie A Détermination du modèle

On admet que la concentration sanguine du principe actif est modélisée par une fonction f dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et définie pour tout $t \in [0\,;+\infty[$ par :

$$f(t) = (at+b)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$$

où a et b sont deux constantes réelles.



Les observations médicales fournissent les deux informations suivantes :

- À l'instant de l'injection, la concentration sanguine est nulle.

- La vitesse initiale d'augmentation de la concentration (qui correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe de f à l'instant $t = 0$) est de 6 mg $\cdot$ L^{-1} $\cdot$ h^{-1}.

1. Montrer que $b = 0$.
2. Montrer que pour tout $t \in [0\,;+\infty[$:
$$f'(t) = (a - 0{,}5at)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$$
3. En déduire la valeur du réel a, puis donner l'expression finale de la fonction f.

Partie B Étude de la fonction f

On considère dans la suite la fonction f dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et définie pour tout $t \in [0\,;+\infty[$ par :
$$f(t) = 6t\mathrm{e}^{-0{,}5t}$$

1. Après avoir remarqué que : pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $f(t) = -12 \times (-0{,}5t)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$,
déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Montrer que pour tout $t \in [0\,;+\infty[$:
$$f'(t) = 3(2 - t)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$$
3. Étudier le signe de $f'(t)$ sur $[0\,;+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Pour éviter tout risque d'effets indésirables graves, la concentration sanguine en principe actif ne doit à aucun moment dépasser le seuil de 4,5 mg $\cdot$ L^{-1}. Le patient est-il mis en danger lors de ce traitement ? Justifier.

Solution

Partie A Détermination du modèle

1. À l'instant $t = 0$, la concentration est nulle, donc $f(0) = 0$.
Or
$$f(0) = 0 \iff (a \times 0 + b)\mathrm{e}^{-0{,}5\times 0} = 0 \iff b \times 1 = 0 \iff b = 0$$
Donc $b = 0$.
2. Comme $b = 0$, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$:
$$f(t) = at\mathrm{e}^{-0{,}5t}$$
La fonction f est de la forme $u \times v$ avec pour tout $t \in [0\,;+\infty[$:
$$u(t) = at \text{ et } v(t) = \mathrm{e}^{-0{,}5t}$$
donc avec
$$u'(t) = a \text{ et } v'(t) = -0{,}5\mathrm{e}^{-0{,}5t}$$
Ainsi, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$:
$$f'(t) = a\mathrm{e}^{-0{,}5t} + at\left(-0{,}5\mathrm{e}^{-0{,}5t}\right) = (a - 0{,}5at)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$$
3. Pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $f'(t) = (a - 0{,}5at)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$.
La vitesse initiale d'augmentation donne $f'(0) = 6$,
Or
$$f'(0) = 6 \iff (a - 0{,}5a \times 0)\mathrm{e}^{0} = 6 \iff a = 6$$
Donc $a = 6$ et l'expression de f est donc pour tout $t \in [0\,;+\infty[$:
$$f(t) = 6t\mathrm{e}^{-0{,}5t}$$

Partie B Étude de la fonction f

1. **Limite en $+\infty$:**

   Pour tout $t \in [0\,;+\infty[$:

   $$f(t) = -12 \times (-0{,}5t)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$$

   $\lim\limits_{t\to+\infty}(-0{,}5t) = -\infty$ et par croissances comparées, $\lim\limits_{X\to-\infty} X\mathrm{e}^{X} = 0$,

   donc par composition $\lim\limits_{t\to+\infty}(-0{,}5t)\mathrm{e}^{-0{,}5t} = 0$.

   Par produit par -12 :

   $$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$$

   Interprétation dans le contexte : À long terme, la concentration du principe actif dans le sang devient nulle, ce qui signifie que le médicament est totalement éliminé par l'organisme.

2. **Calcul de la dérivée :**

   La fonction f est de la forme $u \times v$ avec pour tout $t \in [0\,;+\infty[$:

   $$u(t) = 6t \quad \text{et} \quad v(t) = \mathrm{e}^{-0{,}5t}$$

   donc avec

   $$u'(t) = 6 \quad \text{et} \quad v'(t) = -0{,}5\mathrm{e}^{-0{,}5t}$$

   Ainsi, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$:

   $$\begin{aligned} f'(t) &= 6\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 6t\left(-0{,}5\mathrm{e}^{-0{,}5t}\right) \\ &= (6-3t)\mathrm{e}^{-0{,}5t} \\ &= 3(2-t)\mathrm{e}^{-0{,}5t} \end{aligned}$$

3. **Signe de $f'(t)$ et tableau de variations :**

   Pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $3 > 0$ et $\mathrm{e}^{-0{,}5t} > 0$ car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

   Le signe de $f'(t)$ est donc celui de $2-t$:

   - $2-t = 0 \iff t = 2$
   - $2-t > 0 \iff -t > -2 \iff t < 2$
   - $2-t < 0 \iff -t < -2 \iff t > 2$

   De plus, $f(2) = 6 \times 2 \times \mathrm{e}^{-0{,}5\times 2} = 12\mathrm{e}^{-1} = \dfrac{12}{\mathrm{e}}$.

   On obtient le tableau de variations suivant :

t	0		2		$+\infty$
Signe de $f'(t)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	↗	$\dfrac{12}{\mathrm{e}}$	↘	0

4. D'après le tableau de variations, la fonction f admet un maximum sur $[0\,;+\infty[$ atteint en $t = 2$ h et égal à :

   $$f(2) = \frac{12}{\mathrm{e}} \approx 4{,}41 \text{ mg} \cdot \mathrm{L}^{-1}$$

   Comme $\dfrac{12}{\mathrm{e}} < 4{,}5$, la concentration maximale reste strictement inférieure au seuil critique de 4,5 mg $\cdot$ L^{-1}.

   Le patient n'est donc **pas mis en danger** lors de ce traitement.