Contrôle **Durée : 55 min**

Limites et études de fonctions

Calculatrice autorisée.

Exercice 1

Dans chacune des questions, on **interprètera graphiquement le résultat**.

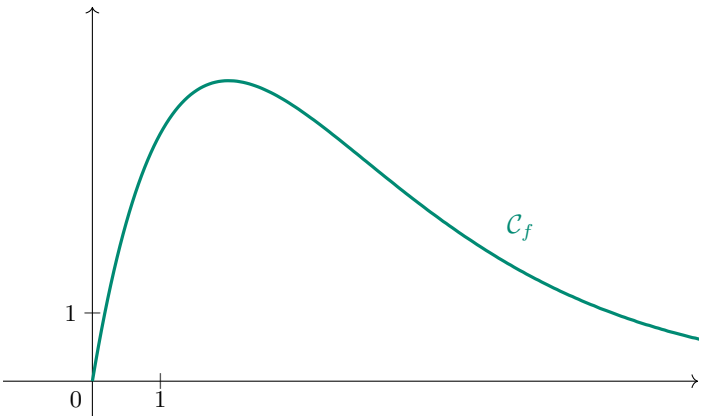
1. Calculer la limite en 5 de la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$ par :
$$f(x) = \frac{-2x+3}{5-x}$$
2. Calculer la limite en $-\infty$ de la fonction g définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
$$g(x) = \mathrm{e}^x(x+4)$$
3. Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction h définie pour tout $x \in [0\,;+\infty[$ par :
$$h(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x+1}}{x+3}$$

Exercice 2

Dans le cadre du suivi d'un traitement antalgique administré à un patient, on étudie la concentration du principe actif dans le sang. Après l'injection initiale à l'instant $t = 0$, la concentration est mesurée en milligrammes par litre ($\mathrm{mg} \cdot \mathrm{L}^{-1}$) en fonction du temps écoulé t, exprimé en heures, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$.

Partie A Détermination du modèle

On admet que la concentration sanguine du principe actif est modélisée par une fonction f dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et définie pour tout $t \in [0\,;+\infty[$ par :
$$f(t) = (at+b)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$$
où a et b sont deux constantes réelles.



Les observations médicales fournissent les deux informations suivantes :

- À l'instant de l'injection, la concentration sanguine est nulle.
- La vitesse initiale d'augmentation de la concentration (qui correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe de f à l'instant $t = 0$) est de 6 $\mathrm{mg} \cdot \mathrm{L}^{-1} \cdot \mathrm{h}^{-1}$.

1. Montrer que $b = 0$.
2. Montrer que pour tout $t \in [0\,;+\infty[$:
$$f'(t) = (a - 0{,}5at)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$$
3. En déduire la valeur du réel a, puis donner l'expression finale de la fonction f.

Partie B Étude de la fonction f

On considère dans la suite la fonction f dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et définie pour tout $t \in [0\,;+\infty[$ par :
$$f(t) = 6t\mathrm{e}^{-0{,}5t}$$

1. Après avoir remarqué que : pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $f(t) = -12 \times (-0{,}5t)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$,
déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Montrer que pour tout $t \in [0\,;+\infty[$:
$$f'(t) = 3(2 - t)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$$
3. Étudier le signe de $f'(t)$ sur $[0\,;+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Pour éviter tout risque d'effets indésirables graves, la concentration sanguine en principe actif ne doit à aucun moment dépasser le seuil de 4,5 mg $\cdot$ L^{-1}. Le patient est-il mis en danger lors de ce traitement ? Justifier.