TD n° 12 : Equations différentielles d'ordre 1

Exercice 1.

1. L'équation caractéristique $r - 3 = 0$ a pour unique solution $r = 3$, les solutions sont donc les fonctions :
$$y_A : t \mapsto Ae^{3t}, \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}$$

2. C'est une équation homogène, on cherche une primitive de $t \mapsto -(-\cos(t))$:
$$\int^t \cos x \; dx = \sin(t)$$
donc les solutions sont les fonctions de la forme :
$$y_A : t \mapsto Ae^{\sin t}, \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}$$

3. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme :
$$y : t \mapsto Ae^{-2t}, \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}$$
En s'inspirant du second membre, on cherche une solution particulière sous la forme $f : t \mapsto (at^2 + bt + c)e^t$. f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \; f'(t) = (2at + b)e^t + (at^2 + bt + c)e^t = \left(at^2 + (2a + b)t + b + c\right) e^t$$
puis :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \; f'(t) + 2f(t) = \left(3at^2 + (2a + 3b)t + (b + 3c)\right) e^t.$$
Pour que f soit solution de l'équation, il suffit de choisir a, b et c qui vérifient $3a = 1$, $2a + 3b = 0$ et $b + 3c = 0$, ou encore :
$$a = 1/3 \quad , \quad b = -2a/3 = -2/9 \quad , \quad c = -b/3 = 2/27$$
On en déduit que la fonction $y_P : t \mapsto \left(\frac{t^2}{3} - \frac{2t}{9} + \frac{2}{27}\right) e^t$ est une solution (particulière) de l'équation.

Enfin on en déduit que les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme :
$$y : t \mapsto Ae^{-2t} + \left(\frac{t^2}{3} - \frac{2t}{9} + \frac{2}{27}\right) e^t, \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}.$$

4. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme :
$$y : x \mapsto Ae^{x}, \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}$$
En s'inspirant du second membre, on est tenté de chercher une solution particulière sous la forme $f : x \mapsto (ax + b)e^x$.

Mais comme $x \mapsto e^x$ est déjà solution de l'équation homogène, cela va échouer et il vaut monter les puissances en posant $f : x \mapsto (ax^2 + bx)e^x$. f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f'(t) = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx)e^x = \left(ax^2 + (2a + b)x + b\right) e^x$$
puis :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f'(x) - f(x) = (2ax + b)e^x.$$

Pour que f soit solution de l'équation, il suffit de choisir a et b qui vérifient $2a = 1$ et $b = 1$. On en déduit que la fonction $y_P : t \mapsto \left(\frac{x^2}{2} + x\right) e^x$ est une solution (particulière) de l'équation.

Enfin on en déduit que les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme :

$$y : x \mapsto Ae^x + \left(\frac{x^2}{2} + x\right) e^x, \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}.$$

5. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme :

$$y : t \mapsto Ae^{t/2}, \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}$$

Pour s'inspirer du second membre, on commence par le simplifier en linéarisant :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t).$$

Le principe de superposition assure que la somme de solutions des équations $E_1 : 2y' - y = \frac{1}{2}$ et $E_2 : 2y' - y = \frac{1}{2}\cos(2t)$ donnera une solution de l'équation différentielle.

Posons alors $f : t \mapsto a$, f est clairement solution de E_1 si et seulement si $-a = \frac{1}{2}$, donc si et seulement si $a = -1/2$: la fonction $y_{P1} : t \mapsto -1/2$ ets donc solution de E_1.

Posons ensuite $g : t \mapsto a\cos(2t) + b\sin(2t)$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g'(t) = -2a\sin(2t) + 2b\cos(2t)$$

puis :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ 2g'(t) - g(t) = (4b - a)\cos(2t) - (4a + b)\sin(2t).$$

Pour que g soit solution de E_2, il suffit de choisir a et b qui vérifient $4b - a = 1/2$ et $4a + b = 0$, ou encore :

$$a = -1/34 \quad , \quad b = 2/17$$

On en déduit que la fonction $y_{P2} : t \mapsto -\frac{\cos(2t)}{34} + \frac{2\sin(2t)}{17}$ est solution de E_2, puis que la fonction :

$$y_P : t \mapsto -\frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{34} + \frac{2\sin(2t)}{17}$$

est une solution (particulière) de l'équation.

Enfin on en déduit que les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme :

$$y : t \mapsto Ae^{t/2} - \frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{34} + \frac{2\sin(2t)}{17}, \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}.$$

6. Comme $\int -(-e^t) = \int e^t = e^t$, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme :

$$y : t \mapsto Ae^{e^t}, \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}$$

Comme l'équation n'est pas à coefficient constant, on utilise la variation de la constante pour chercher une solution particulière de l'équation. On pose donc $f : t \mapsto A(t)e^{e^t}$, f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = A'(t)e^{e^t} + A(t)e^t e^{e^t}$$

puis :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) - e^t f(t) = A'(t)e^{e^t}.$$

Pour que f soit solution de l'équation, il suffit de choisir A telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, A'(t)e^{e^t} = 2te^t \quad \text{ou encore} \quad \forall t \in \mathbb{R},\ A'(t) = 2te^t e^{-e^t}.$$

Ne sachant pas calculer de primitive de cette fonction, on va se contenter de poser $A : t \mapsto \int_0^t 2xe^x e^{-e^x}\ dx$, alors la fonction $y_P : t \mapsto A(t)e^{e^t} = \left(\int_0^t 2xe^x e^{-e^x}\ dx\right) e^{e^t}$ est une solution (particulière) de l'équation.

Enfin on en déduit que les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme :

$$y : t \mapsto Ae^{e^t} + \left(\int_0^t 2xe^x e^{-e^x}\ dx\right) e^{e^t}, \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}.$$

7. L'équation est homogène mais n'a pas la forme des équations du cours. Il faut diviser par t^3, ce qui nécessite de se placer sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ séparément. Sur l'un de ces intervalles, l'équation se réécrit $y' - \frac{2}{t^3}y = 0$, et comme on a :

$$\int -\left(-\frac{2}{t^3}\right) = 2 \times \frac{t^{-2}}{-2} = -\frac{1}{t^2},$$

les solutions sont donc les fonctions de la forme :

$$y : t \mapsto Ae^{-1/t^2}, \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}.$$

8. En se plaçant sur $I = \mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$ pour diviser par t^2, l'équation se réécrit $y' - \frac{2t-1}{t^2}y = 1$.

On calcule alors :

$$\int \frac{2t-1}{t^2} = 2\int \frac{1}{t} - \int \frac{1}{t^2} = 2\ln(|t|) + \frac{1}{t}$$

et on en déduit que les solutions de l'équation homogène sont de la forme :

$$y : t \mapsto At^2 e^{1/t}, \text{ avec } A \in \mathbb{R}.$$

L'équation homogène $y_H' - \frac{2t-1}{t^2}y_H$ a pour solution les fonctions de la forme :

$$y_H : t \mapsto Ae^{\int^t \frac{2x-1}{x^2}\ dx} = Ae^{2\int^t \frac{1}{x}\ dx - \int^t \frac{1}{x^2}\ dx} = Ae^{2\ln|t| + \frac{1}{t}} = At^2 e^{1/t}$$

L'équation est à coefficients non constants, on utilise la variation de la constante. On pose $f : t \mapsto A(t)t^2 e^{1/t}$, f est dérivable sur I et :

$$\forall t \in I,\ f'(t) = A'(t)t^2 e^{1/t} + 2A(t)te^{1/t} - A(t)e^{1/t}$$

puis :

$$\forall t \in I,\ f'(t) - \frac{2t-1}{t^2}f(t) = A'(t)t^2 e^{1/t}.$$

Pour que f soit solution de l'équation, il suffit de choisir A telle que :

$$\forall t \in I, A'(t)t^2 e^{1/t} = 1 \quad \text{ou encore} \quad A'(t) = \frac{1}{t^2}e^{-1/t}$$

On peut alors choisir :

$$A(t) = \int \frac{1}{t^2}e^{-1/t} = e^{-1/t} \quad \text{qui donne} \quad f : t \mapsto e^{-1/t} \times t^2 e^{1/t} = t^2.$$

On en déduit que $y_P : t \mapsto t^2$ est une solution (particulière) de l'équation, et enfin les solutions sont les fonctions de la forme :

$$y : t \mapsto At^2 e^{1/t} + t^2, \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}.$$

9. On peut diviser par $1 + t^2$ puisque la fonction ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et l'équation se réécrit :

$$y' + \frac{t}{1+t^2}y = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

On calcule alors :

$$\int -\frac{t}{1+t^2} = -\frac{1}{2}\ln(1+t^2)$$

donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme :

$$y : t \mapsto A\ (1+t^2)^{-1/2} = \frac{A}{\sqrt{1+t^2}}.$$

L'équation est à coefficients non constants, on utilise la variation de la constante. On pose $f : t \mapsto A(t)\ (1+t^2)^{-1/2}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = A'(t)\ (1+t^2)^{-1/2} - \frac{1}{2} \times 2t \times A(t)\ (1+t^2)^{-3/2} = A'(t)\ (1+t^2)^{-1/2} - t\ A(t)\ (1+t^2)^{-3/2}$$

puis :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) + \frac{t}{1+t^2} f(t) = A'(t)\ (1+t^2)^{-1/2}.$$

Pour que f soit solution de l'équation, il suffit de choisir A telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, A'(t)\ (1+t^2)^{-1/2} = (1+t^2)^{-1/2} \quad \text{ou encore} \quad A'(t) = 1$$

On peut alors choisir $A(t) = t$, et on en déduit que $y_P : t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ est une solution (particulière) de l'équation.

Enfin les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme :

$$y : t \mapsto \frac{A+t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}.$$

10. On isole y en primitivant deux fois : y est solution de l'équation si et seulement si on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y''(t) = \frac{3}{5} - \frac{2}{5}\cos(t) - \frac{2}{5}\sin(t) + \frac{4}{5}e^{2t}$$

si et seulement si :

$$\exists A \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) = A + \frac{3}{5}t - \frac{2}{5}\sin(t) + \frac{2}{5}\cos(t) + \frac{2}{5}e^{2t}$$

si et seulement si :

$$\exists A, B \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = B + At + \frac{3}{10}t^2 + \frac{2}{5}\cos(t) + \frac{2}{5}\sin(t) + \frac{1}{5}e^{2t}$$

Exercice 2.

- **Analyse**. Soit f une solution du problème.
  - En évaluant en 0 et 0, on obtient $f(0) = f(0)^2$, donc $f(0) \in \{0, 1\}$.

    Si $f(0) = 0$, en évaluant en 0 et x on obtient :

    $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0) \times f(x) = 0$$

    donc f est la fonction nulle.
  - On suppose maintenant que $f(0) = 1$. On fixe $a \in \mathbb{R}$ et on a :

    $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(a+x) = f(a)f(x)$$

    et tout est dérivable donc :

    $$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(a+x) = f(a)f'(x).$$

    En évaluant en $x = 0$, on a alors :

    $$\forall a \in \mathbb{R},\ f'(a) = f'(0) \times f(a).$$

    En posant $\alpha = f'(0)$, on en déduit que f est solution de l'équation différentielle $y' = \alpha y$, donc il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que :

    $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = Ae^{\alpha x}.$$

    Enfin on a vu que $f(0) = 1$, donc $Ae^0 = 1$, ou encore $A = 1$.

- **Synthèse.**
  La fonction nulle est solution du problème, et en fixant $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto e^{\alpha x}$ on a bien :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ f(a) \times f(b) = e^{\alpha a} e^{\alpha b} = e^{\alpha(a+b)} = f(a+b)$$

  donc f est solution : les solutions du problème sont la fonction nulle et les fonctions $f : x \mapsto e^{\alpha x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.
On veut déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables, telles que :

$$\forall \in \mathbb{R},\ f'(x) + xf(-x) = 0.$$

1. Soit f une solution, et $g : x \mapsto f(-x)$.

   (a) On remarque que $f(-x) = g(x)$ et $g(-x) = f(x)$ pour tout x, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = g(x) + f(x) = (f+g)(x)$$

   et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f-g)(-x) = f(-x) - g(-x) = g(x) - f(x) = -(f-g)(x)$$

   donc $f+g$ est paire et $f-g$ est impaire.

   (b) Attention à la composition : la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -f'(-x).$$

   Or, pour tout réel x, $-x$ est aussi un réel donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + xf(-x) = 0 \quad \text{et} \quad f'(-x) - xf(x) = 0$$

   ce qu'on peut réérire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + xg(x) = 0 \quad \text{et} \quad g'(x) + xf(x) = 0.$$

   En additionnant, on en déduit que $f+g$ est solution de l'équation différentielle $y' + xy = 0$, donc il existe bien $A \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + g(x) = Ae^{-\frac{x^2}{2}}.$$

   (c) En soustrayant cette fois, on obtient que $f-g$ est solution de l'équation différentielle $y' - xy = 0$, donc il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - g(x) = Be^{\frac{x^2}{2}}.$$

   On en déduit que $f-g$ est paire, et on a vu plus tôt que $f-g$ est impaire : c'est donc la fonction nulle et on en déduit bien que $f = g$.

   (d) On remplace dans la question précédente et on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 2f(x) = Ae^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{puis} \quad f(x) = \frac{A}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

   Enfin $A/2$ est un réel, en le renommant A, il existe bien $A \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = Ae^{-\frac{x^2}{2}}.$$

2. On fixe $A \in \mathbb{R}$ et on teste la fonction $f : x \mapsto Ae^{-\frac{x^2}{2}}$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -Axe^{-\frac{x^2}{2}} = -xf(x)$$

   et f est paire, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + xf(-x) = -xf(x) + xf(x) = 0$$

   donc f est solution : les solutions sont donc les fonctions $f : x \mapsto Ae^{-\frac{x^2}{2}}$ avec $A \in \mathbb{R}$.