TD n° 14 : Equations différentielles d'ordre 2

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. L'équation caractérisitque est $ir^2+(i-1)r-\frac{i}{2}=0$ dont le discriminant vaut

$$\Delta=(i-1)^2-4i\times\left(-\frac{i}{2}\right)=i^2-2i+1+2i^2=-2i-2=\sqrt{8}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{8}\,e^{i5\pi/4}=\left(\sqrt{\sqrt{8}}\,e^{i5\pi/8}\right)^2$$

et ses solutions sont donc :

$$r_1=\frac{1-i+\sqrt{\sqrt{8}}\,e^{i5\pi/8}}{2i}\quad\text{et}\quad r_2=\frac{1-i-\sqrt{\sqrt{8}}\,e^{i5\pi/8}}{2i}$$

Les solutions de l'équation différentielles sont donc les focntions de la forme :

$$y:x\mapsto Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}$$

avec A et B fixés dans $\mathbb{C}$, et r_1 et r_2 les deux nombres complexes ci-dessus.

2. L'équation caractérisitque est $ir^2+(i-1)r-\frac{1}{2}=0$ dont le discriminant vaut

$$\Delta=(i-1)^2-4i\times\left(-\frac{1}{2}\right)=i^2-2i+1+2i=0$$

et son unique solution est donc :

$$r_0=\frac{1-i}{2i}$$

Les solutions de l'équation différentielles sont donc les focntions de la forme :

$$y:x\mapsto Ae^{r_0x}+Bxe^{r_0x}$$

avec A et B fixés dans $\mathbb{C}$, et r_0 le nombre complexe ci-dessus.

3. (a) L'équation caractérisitque est $r^2+3r-3=0$ dont le discriminant vaut

$$\Delta=9+12=21=\left(\sqrt{21}\right)^2$$

et ses solutions sont donc :

$$r_1=\frac{-3+\sqrt{21}}{2}\quad\text{et}\quad r_2=\frac{-3-\sqrt{21}}{2}$$

Les solutions de l'équation différentielles sont donc les focntions de la forme :

$$y:x\mapsto Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}$$

avec A et B fixés dans $\mathbb{C}$, et r_1 et r_2 les deux nombres réels ci-dessus.

(b) L'équation caractérisitque est $r^2+3r-3=0$ dont le discriminant vaut

$$\Delta = 9+12 = 21 = \left(\sqrt{21}\right)^2$$

et ses solutions sont donc :

$$r_1 = \frac{-3+\sqrt{21}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-3-\sqrt{21}}{2}$$

Les solutions de l'équation différentielles sont donc les focntions de la forme :

$$y : x \mapsto Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$$

avec A et B fixés dans $\mathbb{R}$, et r_1 et r_2 les deux nombres réels ci-dessus.

4. (a) L'équation caractérisitque est $2r^2-4r+2=0$ dont le discriminant vaut

$$\Delta = 16-16 = 0$$

et son unique solution est donc :

$$r_0 = \frac{4}{4} = 1$$

Les solutions de l'équation différentielles sont donc les focntions de la forme :

$$y : x \mapsto Ae^{x} + Bxe^{x}$$

avec A et B fixés dans $\mathbb{C}$.

(b) L'équation caractérisitque est $2r^2-4r+2=0$ dont le discriminant vaut

$$\Delta = 16-16 = 0$$

et son unique solution est donc :

$$r_0 = \frac{4}{4} = 1$$

Les solutions de l'équation différentielles sont donc les focntions de la forme :

$$y : x \mapsto Ae^{x} + Bxe^{x}$$

avec A et B fixés dans $\mathbb{R}$.

5. (a) L'équation caractérisitque est $r^2+r+1=0$ dont le discriminant vaut

$$\Delta = 1-4 = -3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$$

et ses solutions sont donc :

$$r_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

Les solutions de l'équation différentielles sont donc les focntions de la forme :

$$y : x \mapsto Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$$

avec A et B fixés dans $\mathbb{C}$, et r_1 et r_2 les deux nombres complexes ci-dessus.

(b) L'équation caractérisitque est $r^2+r+1=0$ dont le discriminant vaut

$$\Delta = 1-4 = -3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$$

et ses solutions sont donc :

$$r_{1,2} = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Les solutions de l'équation différentielles sont donc les focntions de la forme :

$$y : x \mapsto e^{-x/2}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

avec A et B fixés dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2.

1. L'équation homogène est à coefficients constants, l'équation caractéristique associée est $r^2-5r+6=0$, qui a pour discriminant $\Delta = 25-24 = 1$ et pour racines $r = \frac{5\pm1}{2}$ donc $r=3$ et $r=2$. Les solutions de l'équation homogène sont alors les fonctions de la forme :

$$y : t \mapsto Ae^{3t} + Be^{2t}, \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

Par principe de superposition, on peut chercher une solution particulière comme somme d'une solution particulière pour le second membre $te^{2t}/2$ et d'une solution particulière pour le second membre $te^{-2t}/2$.

Pour la première, comme $t \mapsto e^{2t}$ est solution homogène, il faut monter les degrés de 1 et chercher sous la forme $f : t \mapsto (at^2+bt)e^{2t}$: elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = (2at+b)e^{2t} + 2(at^2+bt)e^{2t} = \left(2at^2+(2a+2b)t+b\right)e^{2t}$$

puis

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f''(t) = \left(4at+(2a+2b)\right)e^{2t} + 2\times\left(2at^2+(2a+2b)t+b\right)e^{2t} = \left(4at^2+(8a+4b)t+2a+4b\right)e^{2t}$$

et enfin :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f''(t)-5f'(t)+6f(t) = \left((4a-10a+6a)t^2+(8a+4b-10a-10b+6b)t+2a+4b-5b\right)e^{2t} = (-2at+2a-b)e^{2t}$$

Pour que f soit solution, il suffit de poser a et b tels que $-2a = 1/2$ et $2a-b=0$, ou encore

$$a = -1/4 \quad , \quad b = 2a = -1/2.$$

Finalement la fonction $f : t \mapsto -\frac{t^2+2t}{4}e^{2t}$ est solution de l'équation $y''-5y'+6y = \frac{t}{2}e^{2t}$.

Pour la seconde, comme $t \mapsto e^{-2t}$ n'est pas solution homogène, on cherche sous la forme $g : t \mapsto (at+b)e^{-2t}$: elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g'(t) = ae^{-2t} - 2(at+b)e^{-2t} = \left(-2at+a-2b\right)e^{-2t}$$

puis

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g''(t) = -2ae^{-2t} - 2\times\left(-2at+a-2b\right)e^{-2t} = \left(4at-4a+4b\right)e^{-2t}$$

et enfin :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g''(t)-5g'(t)+6g(t) = \left((4a+10a+6a)t-4a+4b-5a+10b+6b\right)e^{-2t} = (20at-9a+20b)e^{-2t}.$$

Pour que g soit solution, il suffit de poser a et b tels que $20a = 1/2$ et $20b-9a=0$, ou encore

$$a = 1/40 \quad , \quad b = 9a/20 = 9/800.$$

Finalement la fonction $g : t \mapsto \frac{40t+9}{800}e^{-2t}$ est solution de l'équation $y''-5y'+6y = \frac{t}{2}e^{-2t}$.

La fonction $f+g$ est alors solution (particulière) de l'équation de départ, et les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme :

$$y : t \mapsto Ae^{3t} + Be^{2t} - \frac{t^2+2t}{4}e^{2t} + \frac{40t+9}{800}e^{-2t}, \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

2. L'équation homogène admet comme solution immédiate les fonctions de la forme :

$$y : t \mapsto A\cos t + B\sin t, \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

puis on cherche une solution particulière (un sinus doit accompagner le cosinus et on doit monter le degré car $\cos t$ et $\sin t$ sont solutions homogènes) sous la forme :

$$f : t \mapsto (at^2 + bt)\cos t + (ct^2 + dt)\sin t$$

qui est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel t on a :

$$f'(t) = (2at + b)\cos t - (at^2 + bt)\sin t + (2ct + d)\sin t + (ct^2 + dt)\cos t$$

puis

$$f''(t) = 2a\cos t - (2at+b)\sin t - (2at+b)\sin t - (at^2+bt)\cos t + 2c\sin t + (2ct+d)\cos t + (2ct+d)\cos t - (ct^2+dt)\sin t$$

et enfin :

$$f''(t)+f(t) = \big((-a+a)t^2 + (-b+4c+b)t + (2a+2d)\big)\cos(t) + \big((-c+c)t^2 + (-4a-d+d)t + (-2b+2c)\big)\sin(t).$$

Pour que f soit solution, il suffit de poser a, b, c et d tels que $4c = 1$, $2a + 2d = 0$, $-4a = 0$ et $2c - 2b = 0$ ou encore :

$$a = 0 \quad , \quad d = 0 \quad , \quad c = 1/4 \quad , \quad b = 1/4.$$

Finalement la fonction $f : t \mapsto \frac{t\cos t + t^2 \sin t}{4}$ est solution (particulière) de l'équation de départ, et les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme :

$$y : t \mapsto A\cos t + B\sin t + \frac{t\cos t + t^2\sin t}{4}, \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

3. On reconnaît l'oscillateur harmonique, dont les solutions sont immédiatement les fonctions de la forme :

$$y : t \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t), \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

4. L'équation homogène a pour équation caractéristique $r^2+2r+2 = 0$, de discriminant $\Delta = 4-8 = -4$ et pour racines complexes conjuguées $r = \frac{-2\pm 2i}{2} = -1 \pm 1i$.

Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme :

$$y : t \mapsto Ae^{-t}\cos t + Be^{-t}\sin t, \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

Le second membre étant solution de l'équation homogène, il faut alors chercher une solution particulière sous la forme : $f : t \mapsto= ate^{-t}\cos t + bte^{-t}\sin t$. Après injection et identification laissée au lecteur, on trouve une solution de l'équation en posant :

$$a = -\frac{1}{8} \quad , \quad b = \frac{1}{8}$$

donc $f : t \mapsto \frac{1}{8}te^{-t}(\sin t - \cos t)$ est solution de l'équation de départ, et les solutions sont alors les fonctions de la forme :

$$y : t \mapsto Ae^{-t}\cos t + Be^{-t}\sin t + \frac{1}{8}te^{-t}(\sin t - \cos t), \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3.
Analyse : Si f est solution, alors pour tout x réel on a $f'(x) = e^x - f(-x)$ donc f' est dérivable par opérations usuelles. On peut alors dériver l'égalité et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - f'(-x) = e^x$$

Or on sait que $f'(x) + f(-x) = e^x$, donc en appliquant en $-x$ on a $f'(-x) + f(x) = e^{-x}$ et on a donc en additionnant les deux égalités :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(x) = e^x + e^{-x} = 2\,\mathrm{ch}(x)$$

donc f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 2\,\mathrm{ch}(x)$.

Résolvons alors cette équation différentielle : les solutions homogènes (on reconnaît un oscillateur harmonique) sont :

$$y : x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x) \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

et on remarque que $\mathrm{ch}'' + \mathrm{ch} = 2\,\mathrm{ch}$, donc ch est solution de $y'' + y = 2\,\mathrm{ch}$: les solutions sont donc :

$$y : x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x) + \mathrm{ch}(x)\ , \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

et comme f est solution de $y'' + y = 2\,\mathrm{ch}$, il existe A et B réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + \mathrm{ch}(x).$$

On peut alors calculer :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -A\sin(x) + B\cos(x) + \mathrm{sh}(x)$$

puis

$$f'(x)+f(-x) = -A\sin(x)+B\cos(x)+\mathrm{sh}(x)+A\cos(x)-B\sin(x)+\mathrm{ch}(x) = (A+B)\cos(x)-(A+B)\sin(x)+e^x$$

Or f est solution, donc $f'(x) + f(-x) = e^x$, on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (A+B)\cos(x) - (A+B)\sin(x) = 0.$$

En $x = 0$, on a alors $(A + B) \times 1 - (A + B) \times 0 = 0$, donc $A + B = 0$ puis $B = -A$ et finalement :

$$\exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = A(\cos(x) - \sin(x)) + \mathrm{ch}(x).$$

Synthèse : on pose A réel et $f : x \mapsto A(\cos(x) - \sin(x)) + \mathrm{ch}(x)$ sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -A(\cos(x) + \sin(x)) + \mathrm{sh}(x) \quad \text{et} \quad f(-x) = A(\cos(x) + \sin(x)) + \mathrm{ch}(x)$$

puis

$$f'(x) + f(-x) = \mathrm{sh}(x) + \mathrm{ch}(x) = e^x$$

donc f est bien solution : les solutions sont donc :

$$f : x \mapsto A(\cos(x) - \sin(x)) + \mathrm{ch}(x) \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.

1. (a) exp est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$: par composition, z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

   (b) Comme $z(t) = y(e^t)$ pour tout réel t et $\ln(t) \in \mathbb{R}$ pour tout $t > 0$, on a :

   $$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ y(t) = y(e^{\ln(t)}) = z(\ln(t))$$

   et tout est dérivable deux fois, on a alors :

   $$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ y'(t) = \frac{1}{t}z'(\ln(t)) \quad \text{et} \quad y''(t) = -\frac{1}{t^2}z'(\ln(t)) + \frac{1}{t^2}z''(\ln(t)).$$

   (c) On a alors :

   $$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ t^2y''(t) + ty'(t) - 9y(t) = 6t^3 \iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ -z'(\ln(t)) + z''(\ln(t)) + z'(\ln(t)) - 9z(\ln(t)) = 6t^3$$

   $$\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ z''(\ln(t)) - 9z(\ln(t)) = 6t^3.$$

   Or $\mathbb{R}_+^* = \{e^t, t \in \mathbb{R}\}$, $\ln(e^t) = t$ et $(e^t)^3 = e^{3t}$ donc :

   $$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ t^2y''(t) + ty'(t) - 9y(t) = 6t^3 \iff \forall t \in \mathbb{R},\ z''(t) - 9z(t) = 6e^{3t}$$

2. On résoud l'équation différentielle $z'' - 9z = 6e^{3t}$:

- Les solutions de $z'' - 9z = 0$ sont (attention, ce n'est pas un oscillateur harmonique!!!) :
$$h : t \mapsto Ae^{3t} + Be^{-3t}.$$
- On cherche une solution particulière, on teste $f : t \mapsto Ate^{3t}$, qui est bien dérivable, puis on a pour tout réel t :
$$f'(t) = (3At + A)e^{3t} \quad , \quad f''(t) = (9At + 6A)e^{3t} \quad , \quad f''(t) - 9h(t) = 6Ae^{3t}$$
donc en posant $A = 1$, la fonction $f : t \mapsto te^{3t}$ est une solution de (E).
- Les solutions de (E') sont : $z : t \mapsto Ae^{3t} + Be^{-3t} + te^{3t}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.

3. On peut alors reprendre les équivalences du début pour résoudre l'équation de départ :
$$\begin{aligned}
(\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ t^2y''(t) + ty'(t) - 9y(t) = 6t^3) &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ z''(t) - 9z(t) = 6e^{3t} \\
&\iff \exists A, B \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = Ae^{3t} + Be^{-3t} + te^{3t} \\
&\iff \exists A, B \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ y(e^t) = Ae^{3t} + Be^{-3t} + te^{3t} \\
&\iff \exists A, B \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ y(e^{\ln(t)}) = Ae^{3\ln(t)} + Be^{-3\ln(t)} + \ln(t)e^{3\ln(t)} \\
&\iff \exists A, B \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ y(t) = At^3 + \frac{B}{t^3} + t^3\ln(t).
\end{aligned}$$
car $\mathbb{R} = \{\ln(t), t \in \mathbb{R}_+^*\}$.

Exercice 5.

1. y est trois fois dérivable, donc y, y' et y'' sont dérivables : z est donc dérivable et $z' = y^{(3)} + y'' + y'$, on remarque alors que :
$$y^{(3)} - y = z' - z.$$
2. On a donc :
$$\begin{aligned}
y^{(3)} - y = 0 &\iff z' - z = 0 \iff \exists A \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = Ae^t \\
&\iff \exists A \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R},\ y''(t) + y'(t) + y(t) = Ae^t.
\end{aligned}$$
Pour une constante A quelconque, on résout alors l'équation différentielle ci-dessus.
- L'équation $y'' + y' + y = 0$ admet pour équation caractéristique $r^2 + r + 1 = 0$, de discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$, et admettant donc pour racines complexes $r = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Les solutions réelles de $y'' + y' + y = 0$ sont donc :
$$y : t \mapsto e^{-t/2}\left(B\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right).$$
On cherche alors une solution particulière, on teste $f : t \mapsto ae^t$, qui est bien deux fois dérivable, et qui vérifie :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ f''(t) + f'(t) + f(t) = ae^t + ae^t + ae^t = 3ae^t.$$
En posant $a = \frac{A}{3}$, on obtient bien Ae^t : on en déduit que $f : t \mapsto \frac{A}{3}e^t$ est solution de l'équation, et finalement :
$$y^{(3)} - y = 0 \iff \exists A, B, C \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \frac{A}{3}e^t + e^{-t/2}\left(B\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$$

Remarque : en remarquant que $\{A/3, A \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$, on peut remplacer $A/3$ par une autre constante A' prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$: f est solution si et seulement si il existe A, B et C dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = Ae^t + e^{-t/2}\left(B\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$$

Exercice 6.
Soit f une solution de l'équation différentielle $y' + t\cos(t)y = e^t$, on veut montrer que f est infiniment dérivable. Montrons alors par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, f est k fois dérivable.

On remarque que f est une solution de l'équation différentielle, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) + t\cos(t)f(t) = e^t.$$

- f est dérivable puisqu'elle est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 : la propriété est donc vraie au rang 1.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on suppose que f est k fois dérivable, on veut montrer que f est $k+1$ fois dérivable. Or en isolant f' dans l'égalité ci-dessus, on a :

  $$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = e^t - t\cos(t)$$

  donc f' est k fois dérivable par opérations élémentaires ; on en déduit donc que f est $k+1$ fois dérivable, et la propriété au rang k implique bien la propriété au rang $k+1$.
- D'après le principe de récurrence, f est donc k fois dérivable pour tout entier non nul k : f est donc infiniment dérivable.

Exercice 7.
Soient a et b des réels, et f une fonction paire et continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On veut montrer que l'équation $y'' + ay = f$ admet une unique solution paire sur I vérifiant $y(0) = b$.

1. (a) La fonction g est paire, donc g' est impaire, et par suite $g'(0) = 0$.
   (b) Une solution du problème posé est solution du problème de Cauchy $y'' + ay = f$ et vérifie $y(0) = b$ et $y'(0) = 0$: il y en a donc au plus une.

2. (a) Le problème de Cauchy $y'' + ay = f$, $y(0) = b$ et $y'(0) = 0$ admet bien une solution d'après le cours.

   (b) La fonction h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition, et on a :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = -g'(-x) \quad \text{puis} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ h''(x) = g''(-x).$$

   On en déduit que :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ h''(x) + ah(x) = g''(-x) + ag(-x).$$

   Or g est solution de $y'' + ay = f$, et $-x$ est un réel donc $g''(-x) + ag(-x) = f(-x)$; et comme f est paire on a finalement :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ h''(x) + ah(x) = f(x)$$

   donc h est solution de $y'' + ay = f$.

   (c) On remarque de plus que $h(0) = g(-0) = b$, et $h'(0) = -g'(0) = -0 = 0$: h est donc solution du problème de Cauchy $y'' + ay = f$, $y(0) = b$ et $y'(0) = 0$, comme g : par unicité de la solution d'un problème de Cauchy, $h = g$.

   On en déduit donc que pour tout réel x, $h(x) = g(-x) = g(x)$: g est paire, solution de $y'' + ay = f$ et vérifie $g(0) = b$: c'est l'unique solution du problème posé.