TD n° 12 : Equations différentielles d'ordre 1

Exercice 1.
Résoudre les équations différentielles suivantes sur des intervalles convenables.

1. Résoudre $y' - 3y = 0$.
2. Résoudre $y' - \cos(t)y = 0$.
3. Résoudre $y' + 2y = t^2 e^t$.
4. Résoudre $y' - y = (x+1)e^x$.
5. Résoudre $2y' - y = \cos^2(t)$ avec $y(0) = 0$.
6. Résoudre $y' - e^t y = 2te^t$.
7. Résoudre $t^3 y' = 2y$.
8. Résoudre $t^2 y' - (2t-1)y = t^2$.
9. Résoudre $(1+t^2)y' + ty = \sqrt{1+t^2}$.
10. Résoudre $5y'' + 2\cos(t) - 4e^{2t} = 3 - 2\sin(t)$.

Exercice 2.
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ f(a+b) = f(a)f(b).$$

Exercice 3.
On veut déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables, telles que :

$$\forall \in \mathbb{R},\ f'(x) + xf(-x) = 0.$$

1. Soit f une solution, et $g : x \mapsto f(-x)$.
   (a) Déterminer la parité de $f+g$ et de $f-g$.
   (b) Montrer que $f+g$ est solution d'une équation différentielle à déterminer et en déduire qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + g(x) = Ae^{-\frac{x^2}{2}}.$$
   (c) Montrer que $f-g$ est solution d'une équation différentielle à déterminer et en déduire que $f = g$.
   (d) Montrer finalement qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = Ae^{-\frac{x^2}{2}}.$$
2. Déterminer toutes les solutions du problème posé.