TD n° 14 : Equations différentielles d'ordre 2

Exercice 1.
Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $i\,y'' + (i-1)\,y' - \frac{i}{2}y = 0$ d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
2. $i\,y'' + (i-1)\,y' - \frac{1}{2}y = 0$ d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
3. $y'' + 3\,y' - 3y = 0$ d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ **puis** d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
4. $2\,y'' - 4\,y' + 2y = 0$ d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ **puis** d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
5. $y'' + y' + y = 0$ d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ **puis** d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 2.
Résoudre les équations suivantes sur des intervalles convenables.

1. Résoudre $y'' - 5y' + 6y = t\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}$.
2. Résoudre $y'' + y = t\cos(t)$.
3. Résoudre $y'' + \omega^2 y = 0$.
4. Résoudre $y'' + 2y' + 2y = e^{-t}\cos(t)$.

Exercice 3.
Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x.$$

(on pourra chercher une équation différentielle du second ordre satisfaite par une solution de cette équation)

Exercice 4.
Soit (E) l'équation différentielle suivante : $t^2y'' + ty' - 9y = 6t^3$ d'inconnue $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$.

1. Soit $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$ et $z : t \mapsto y(e^t)$.
   (a) Justifier que $z \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
   (b) Exprimer y' et y'' en fonction de z, z' et z''.
   (c) Montrer que y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si z est solution d'une équation différentielle du second ordre sur $\mathbb{R}$ à déterminer, qu'on notera (E').
2. Résoudre (E').
3. En déduire les solutions de (E).

Exercice 5.
Soit (E) l'équation différentielle suivante : $y^{(3)} - y = 0$ d'inconnue $y \in \mathcal{D}^3(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Soit $y \in \mathcal{D}^3(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$ et $z = y'' + y' + y$.
   Justifier que z est dérivable et exprimer $y^{(3)} - y$ en fonction de z.
2. En déduire les solutions de (E).

Exercice 6.
Soit f une solution de l'équation différentielle $y' + t\cos(t)y = e^t$.

Démontrer que f est infiniment dérivable (on montrera que pour tout entier naturel k, f est k fois dérivable).

Exercice 7.
Soient a et b des réels, et f une fonction paire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On veut montrer que l'équation $y'' + ay = f$ admet une unique solution paire sur I vérifiant $y(0) = b$.

1. (a) Soit g une fonction paire dérivable sur $\mathbb{R}$. Justifier que $g'(0) = 0$.
   (b) En déduire qu'il existe au plus une solution au problème posé.

2. (a) Justifier qu'il existe une solution g de $y'' + ay = f$ sur I vérifiant $g(0) = b$ et $g'(0) = 0$.
   (b) Montrer que la fonction $h : x \mapsto g(-x)$ est solution de de $y'' + ay = f$.
   (c) En déduire que $h = g$, et conclure.