# Devoir applications
# Corrigé

## Partie I.

1. (a) On remarque que $f(A) = \{n+1, n \in A\}$ pour tout $A$ puis une récurrence sans histoire montre que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{Im}(f^n) = [\![n, +\infty[\![.$$
Enfin, comme aucun entier n'est supérieur à tous les $n$ de $\mathbb{N}$,
$$\mathrm{Im}^\omega(f) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [\![n, +\infty[\![ = \emptyset.$$

(b) si $f : X \mapsto X$ est surjective, alors $\mathrm{Im}(f) = X$. Une récurrence immédiate montre alors que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{Im}(f^n) = X.$$
On a alors immédiatement :
$$\mathrm{Im}^\omega(f) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X = X.$$

(c) L'application $f$ retire le plus petit élément de chaque partie, sauf si la partie est vide. Il est alors clair que :
$$\forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ f(E) \subset \mathbb{N}^*$$
En effet $f(E) \subset E$, donc si $E$ est inclus dans $\mathbb{N}^*$, alors $f(E)$ aussi ; sinon, 0 est élément de $E$ donc c'est son minimum, et on le retire pour obtenir $f(E)$, qui est donc inclus dans $\mathbb{N}^*$.

On en déduit donc que $f\left(\mathcal{P}(\mathbb{N})\right) \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$.

Par ailleurs, si $E \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$, alors $f(E \cup \{0\}) = E$ car son plus petit élément est 0, et on en déduit que $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*) \subset f\left(\mathcal{P}(\mathbb{N})\right)$.

Plus généralement, un raisonnement similaire montre que :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ f\left(\mathcal{P}([\![k, +\infty[\![)\right) = \mathcal{P}([\![k+1, +\infty[\![)$$
puis une récurrence sans histoire montre que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{Im}(f^n) = \mathcal{P}([\![n, +\infty[\![).$$
Enfin, comme aucun entier n'est supérieur à tous les $n$ de $\mathbb{N}$, une partie de $\mathbb{N}$ appartenant à tous les $\mathcal{P}([\![n, +\infty[\![)$ est nécessairement vide, et on a donc (la partie vide est immédiatement dans tous les $\mathcal{P}([\![n, +\infty[\![)$) :
$$\mathrm{Im}^\omega(f) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}([\![n, +\infty[\![) = \{\emptyset\}.$$
(Ne pas confondre avec $\emptyset$, c'est un ensemble à un seul élément qui est la partie vide).

2. (a) On sait que $f(A) \subset A$, la croissance de l'image directe donne alors $f^n(f(A)) \subset f^n(A)$ pour tout $n$ ou encore :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{n+1}(A) \subset f^n(A).$$

(b) Récurrence sans histoire. L'initialisation à $n_0$ est immédiate, et si $\mathrm{Im}(f^n) = \mathrm{Im}(f^{n_0})$, alors :

$$\mathrm{Im}(f^{n+1}) = f(\mathrm{Im}(f^n)) = f(\mathrm{Im}(f^{n_0})) = \mathrm{Im}(f^{n_0+1}) = \mathrm{Im}(f^{n_0})$$

et le principe de récurrence donne bien :

$$\mathrm{Im}(f^{n_0+1}) = \mathrm{Im}(f^{n_0}) \Longrightarrow \forall n \geq n_0,\ \mathrm{Im}(f^n) = \mathrm{Im}(f^{n_0}).$$

Comme $f$ est une fonction de $X$ dans $X$, on a $f(X) \subset X$ donc la question précédente assure que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{n+1}(X) \subset f^n(X) \quad \text{ou encore} \quad \mathrm{Im}(f^{n+1}) \subset \mathrm{Im}(f^n).$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \leq n_0,\ \mathrm{Im}(f^{n_0}) \subset \mathrm{Im}(f^n)$$

et l'inclusion reste vraie après $n_0$ puisqu'on a montré l'égalité. On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{Im}(f^{n_0}) \subset \mathrm{Im}(f^n) \quad \text{puis} \quad \mathrm{Im}(f^{n_0}) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}(f^n) = \mathrm{Im}^\omega(f).$$

Par ailleurs, comme $n_0 \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}^\omega(f) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}(f^n) \subset \mathrm{Im}(f^{n_0})$ et finalement :

$$\mathrm{Im}^\omega(f) = \mathrm{Im}(f^{n_0}).$$

3. (a) Soit $x \in \mathrm{Im}^\omega(f)$, on doit montrer que $f(x) \in \mathrm{Im}^\omega(f)$. Or on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x \in \mathrm{Im}(f^n)$$

On en déduit alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) \in f(\mathrm{Im}(f^n)) \quad \text{ou encore} \quad f(x) \in \mathrm{Im}(f^{n+1}).$$

Ceci se réécrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(x) \in \mathrm{Im}(f^n)$$

Enfin, comme $\mathrm{Im}(f^0) = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_X) = X$ et $f$ est une fonction de $X$ dans $X$, il est clair que $f(x) \in \mathrm{Im}(f^0)$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) \in \mathrm{Im}(f^n) \quad \text{donc} \quad f(x) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}(f^n) = \mathrm{Im}^\omega(f).$$

(b) Si $f(A) = A$, en appliquant la question 2.b. à la fonction $f_{|A}$ pour $n_0 = 0$, on a tout de suite :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^n(A) = A.$$

Or, comme $A \subset X$, la croissance de l'image directe donne :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^n(A) \subset f^n(X) = \mathrm{Im}(f^n)$$

et on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A \subset \mathrm{Im}(f^n) \quad \text{donc} \quad A \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}(f^n) = \mathrm{Im}^\omega(f).$$

4. (a) D'après la question 2.b., si $(\mathrm{Im}(f^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir de $n_0$, alors $\mathrm{Im}^\omega(f) = \mathrm{Im}(f^{n_0})$ puis :

$$f(\mathrm{Im}^\omega(f))) = f(\mathrm{Im}(f^{n_0})) = \mathrm{Im}(f^{n_0+1}) = \mathrm{Im}(f^{n_0}) = \mathrm{Im}^\omega(f).$$

(b) Il faut s'arranger pour avoir un élément qui est dans toutes les images itérées, mais qui n'est l'image d'aucun élément qui est dans toutes les images itérées.

Je n'ai rien trouvé de simple... Voici ma proposition : on prend $X = \mathbb{N} \cup \{-1\}$ et on s'arrange pour créer des "cycles" de longueurs de plus en plus grande qui se terminent systématiquement sur la valeur 0, de manière à obtenir 0 dans chacune des images itérées ; et on s'assure d'envoyer 0 sur un point fixe (c'est à ça que sert l'ajout de $-1$) pour qu'il ne "crée" pas un autre élément

de $f^\omega(X)$ qui serait envoyé sur 0.

Ca donne donc : $f(-1) = -1, f(0) = -1$ puis : $f(1) = 0$ ; $f(2) = 3$, $f(3) = 0$ ; $f(4) = 5$, $f(5) = 6$, $f(6) = 0$ ; et ainsi de suite.

Formalisons : on note $a_1 = 1$ puis, pour tout $n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n + n$ puis pour tout $n \geq 1$ et pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, $f(a_n + k) = a_n + k + 1$ et $f(a_n + n - 1) = 0$.

Il est alors clair que pour tout $n \in X$, on a $f(n) \in \{-1, 0\}$ ou $f(n) > n$ : puis, pour $n \in X$ et $k \geq 1$, $f^k(n) \in \{-1, 0\}$ ou $f^k(n) > n + k \geq k$.

Par suite $\mathrm{Im}(f^k) \subset \{-1, 0\} \cup [\![k, +\infty]\!]$ pour tout $k \geq 1$ puis $\mathrm{Im}^\omega(f) \subset \{-1, 0\}$.

Par ailleurs on a $f^n(a_n) = 0$ pour tout $n \geq 1$, donc $0 \in \mathrm{Im}(f^n)$ pour tout $n \geq 1$, donc $0 \in \mathrm{Im}^\omega(f)$.

Par suite, comme $f(0) = -1$ et $f(\mathrm{Im}^\omega(f)) \subset \mathrm{Im}^\omega(f)$, $-1 \in \mathrm{Im}^\omega(f)$ et finalement :

$$\mathrm{Im}^\omega(f) = \{-1, 0\}.$$

En finalement :

$$f(\mathrm{Im}^\omega(f)) = \{f(-1), f(0)\} = \{-1\} \neq \mathrm{Im}^\omega(f)$$

et c'est gagné !

Remarques :

- La présence de "cycles" de toutes les longueurs n'est pas nécessaire, il suffit que les longueurs des "cycles" ne soient pas majorées ; mais pour simplifier l'écriture de la fonction et la preuve qui suit, prendre toutes les longueurs est beaucoup plus agréable.

- On peut expliciter facilement l'expression de $a_n$ pour tout $n$ (un télescopage immédiat donne le résultat), et donc l'expression de $f(n)$ pour tout $n$ (une disjonction de cas sans histoire) ; mais ça n'a aucun intérêt réel, je préfère donc m'en passer.

- Il est clair que pour obtenir un contrexemple, $\mathrm{Im}^\omega(f)$ ne peut être vide (l'image du vide est vide) ni un singleton (l'image d'un singleton est un singleton, et si un singleton est inclus dans un autre, ils sont égaux).
  L'exemple donné est donc minimal en terme de cardinal de $\mathrm{Im}^\omega(f)$.

- De même, impossible d'avoir un exemple avec $X$ de cardinal fini (la partie II le prouve, dans ce cas la suite des images itérées est stationnaire puis $\mathrm{Im}^\omega(f) = X$) : l'exemple donné est donc minimal en terme de cardinal de $X$.

- Mais peut-on trouver une fonction plus simple ? ? ? Pas impossible... mais je n'ai pas d'autre idée, et encore j'ai mis longtemps à la trouver !

Bon finalement j'ai trouvé plus simple (mais je laisse ma première réponse qui est quand même sympa).

On part de la fonction de la question 1c, sauf qu'on ajoute un élément quelconque $\alpha$ à $X$ (par exemple la matrice identité d'ordre 2, bref n'importe quoi, on peut être créatif), on envoie l'ensemble vide sur cet élément et cet élément sur lui-même.

On obtient alors que $\mathrm{Im}(f^n) = \mathcal{P}([\![n, +\infty]\!]) \cup \{\alpha\}$, puis que $\mathrm{Im}^\omega(f) = \{\emptyset, \alpha\}$ ; enfin $f(\mathrm{Im}^\omega(f)) = \{\alpha\} \neq \mathrm{Im}^\omega(f)$ et c'est gagné.

# Partie II.

5. D'après la question 2.a., comme $X$ est stable par $f$, la suite $(\mathrm{Im}(f^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, donc la suite de ses cardinaux est également décroissante.

   Si elle était strictement décroissante, on aurait une suite strictement décroissante d'entiers naturels, ce qui est absurde. Il existe donc $n_0$ tel que $\mathrm{Card}(\mathrm{Im}(f^{n_0+1})) = \mathrm{Card}(\mathrm{Im}(f^{n_0}))$, et comme $\mathrm{Im}(f^{n_0+1}) \subset \mathrm{Im}(f^{n_0})$, les deux ensembles sont égaux.

   D'après la question 2.b., la suite $(\mathrm{Im}(f^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

6. D'après la question 2.b. encore, $Z_0 = \mathrm{Im}(f^{n_0})$, qui est non vide car pour tout $n$ , $\mathrm{Im}(f^n) \neq \emptyset$ (car l'image d'un ensemble non vide par une fonction ne peut être vide).

   On sait de plus que $f(Z_0) = Z_0$ d'après la question 4.a. On en déduit que l'application induite par $f$ sur $Z_0$ est surjective, donc bijective puisque le cardinal de $Z_0$ est fini.

   (Si elle n'était pas injective, $f(Z_0)$ aurait un cardinal strictement inférieur à celui de $Z_0$).

7. On sait qu'il existe $n_0$ tel que $\mathrm{Im}(f^{n_0}) = Z_0$. On en déduit donc que :

   $$\forall x \in X,\ f^{n_0}(x) \in Z_0.$$

   On en déduit donc que pour tout $x \in X$, $\{k \in \mathbb{N},\ f^k(x) \in Z_0\}$ est non vide, puisqu'il contient $n_0$ ; il est de plus inclus dans $\mathbb{N}$, donc admet un minimum qu'on peut alors noter $\delta(x)$.

8. Si $\delta(x) = 0$, alors $x \in Z_0$, donc $f(x) \in Z_0$, donc $\delta(f(x)) = 0$.

   Si $\delta(x) \geq 1$, on sait que $f^{\delta(x)}(x) \in Z_0$, donc $f^{\delta(x)-1}(f(x)) \in Z_0$, donc par minimalité de $\delta(f(x))$, $\delta(f(x)) \leq \delta(x) - 1$.

   Par ailleurs on sait que $f^{\delta(f(x))}(f(x)) \in Z_0$, donc $f^{\delta(f(x))+1}(x) \in Z_0$, donc par minimalité de $\delta(x)$, $\delta(x) \leq \delta(f(x)) + 1$.

   Finalement on obtient :

   $$\delta(f(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \delta(x) = 0 \\ \delta(x) - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

9. La relation $x\mathcal{R}y$ si $\delta(x) = \delta(y)$ est une relation d'équivalence sur $X$ (les trois propriétés sont immédiates), dont les ensembles $Z_k$ sont les classes d'équivalence.

   Comme $X$ est fini, il existe un nombre fini de classes d'équivalences, qui forment une partition de $X$. L'ensemble $\{k \in \mathbb{N},\ Z_k \neq \emptyset\}$ est donc de cardinal fini, donc admet un maximum qu'on note $N$.

   La question précédente montre que pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, $f(Z_k) \subset Z_{k-1}$ donc on en déduit par une récurrence descendante et arrêtée sans histoire que :

   $$\forall k \in [\![0, N]\!],\ Z_k \supset f^{N-k}(Z_N) \neq \emptyset$$

   ce qui assure bien que $Z_k$ est vide si et seulement si $k > N$.

   Par ailleurs les classe d'équivalence d'une relation d'équivalence sur $X$ forment une partition de $X$, ce qui assure bien la deuxième propriété.

# Partie III.

10. (a) $B_0$ est défini comme $X\backslash A$, donc il est disjoint de $A$ ; or $\mathrm{Im}(f) \subset A$, donc $B_0$ est disjoint de $\mathrm{Im}(f)$.

Enfin pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = f(B_{n-1})$ est inclus dans $\mathrm{Im}(f)$, donc $B_0$ est disjoint de $B_n$.

(b) Soit $n$ et $p$ deux entiers strictement positifs distincts ; les rôles étant symétriques, on peut supposer $n < p$ sans perte de généralité.

Supposons que $B_n \cap B_p$ est non vide, posons $a$ un élément de cet ensemble.

Comme $B_n = f^n(B_0)$ et $B_p = f^n(B_{n-p})$, il existe $(x, y) \in B_0 \times B_{n-p}$ tel que $a = f^n(x) = f^n(y)$ ; or $f^n$ est la composée de $n$ applications injectives donc elle est injective, on a donc $x = y$ et on en déduit que $B_0 \cap B_{n-p}$ est non vide : c'est absurde d'après la question précédente.

On en déduit bien que les $B_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ sont deux à deux disjoints.

(c) Il est clair que $C$ est disjoint de tous les $B_n$ d'après sa définition, donc les $B_n$ et $C$ sont deux à deux disjoints.

La définition de $C$ assure encore immédiatement que $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \cup C = X$.

Reste à montrer que $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n\right) \cup C = A$. Mais cela résulte de la définition de $B_0$ : puisque $B_0 = X\backslash A$, on a $X\backslash B_0 = A$, et d'après la partition de $X$ vue précédemment, $X\backslash B_0$ est bien égal à la réunion des $B_n$ pour $n > 0$ et de $C$.

(d) $u$ est injective, donc sa restriction à la réunion des $B_n$ l'est aussi : il reste donc à montrer que $u\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n$. Mais c'est immédiat :

$$u\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} u(B_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{n+1} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n.$$

(e) Notons $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ et $B' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n$.
On pose alors $v(x) = u(x)$ si $x \in B$ et $v(x) = x$ si $x \in C$.

Alors $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Im}(u_{\backslash B}) \cup \mathrm{Im}(\mathrm{id}_C) = B' \cup C = A$ d'une part, et d'autre part, si $v(a) = v(b)$, alors :

- s'ils sont tous les deux dans $C$, alors ils ne sont pas dans $B'$ donc nécessairement $a$ et $b$ sont dans $C$ : on a alors $v(a) = a$ et $v(b) = b$, donc $a = b$. ;
- s'ils ne sont pas dans $C$, $v(a) \neq a$ et $v(b) \neq b$, donc nécessairement $a$ et $b$ sont dans $B$ ; on a alors $v(a) = u(a)$ et $v(b) = u(b)$, donc $u(a) = u(b)$, et $u$ est injective donc $a = b$.

Dans tous les cas on a bien $a = b$, donc $v$ est injective : c'est une bijection de $X$ dans $A$.

11. $f$ est une injection de $X$ dans $Y$ et $g$ est une injection de $Y$ dans $X$, alors $g \circ f$ est une injection de $X$ dans $X$.

D'après le lemme de Dedekind, toute partie $A$ de $X$ telle que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset A$ est en bijection avec $E$.

En particulier, comme $\mathrm{Im}(g \circ f) = g(\mathrm{Im}(f) \subset g(F) = \mathrm{Im}(g)$ (car $\mathrm{Im}(f) \subset F$), alors il existe une bijection de $E$ vers $\mathrm{Im}(g)$.

Or $g$ est injective donc induit une bijection de $F$ dans $\mathrm{Im}(g)$ : en composant la bijection précédente par la réciproque de $g$, on obtient bien une bijection de $E$ dans $F$.

12. (a) On numérote les nombres premiers dans l'ordre strictement croissant, l'ensemble des nombres premiers est alors $\{p_k,\ k \in \mathbb{N}\}$.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite presque nulle, on note alors :

$$\varphi(u) = \prod_{n\in\mathbb{N}} (p_n)^{u_n} - 1.$$

Le produit est bien défini car il est fini (seul un nombre fini de facteurs est différent de 1) et son résultat est un élément de $\mathbb{N}^*$. L'unicité de la décomposition en facteurs premiers assure alors l'injectivité de la fonction $\varphi$, et l'existence assure que son image est $\mathbb{N}$.

On en déduit bien que $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ est dénombrable.

(b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

L'application $(u_0, \dots, u_{r-1}) \mapsto (u_0, \dots, u_{r-1}, 0, \dots)$ est une injection de $\mathbb{N}^r$ dans $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$, et si $\varphi$ est la bijection de la question précédente, l'application $u \mapsto (\varphi(u), 0, \dots, 0)$ est une injection de $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ dans $\mathbb{N}^r$, donc $\mathbb{N}^r$ et $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ sont en bijection.

La composée de deux bijections étant une bijection, on en déduit bien que $\mathbb{N}^r$ est dénombrable.

(c) La fonction $f(2n) = n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $f(2n-1) = -n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ réalise une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.

(d) Comme $\mathbb{N}^*$ est dénombrable (immédiat, avec la bijection $n \mapsto n+1$), alors il existe une bijection entre $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, puis entre $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ puisque $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$ sont en bijection, et enfin entre $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{N}$ d'après les questions précédentes.

L'application qui à $r = \frac{a}{b}$ écrit sous forme irréductible associe le couple $(a, b)$ est une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, et en la composant par une bijection de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$ on obtient une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$.

Par ailleurs l'application qui à $n$ associe $n$ est une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$ ; on en déduit donc que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{N}$ sont en bijection d'après Cantor-Bernstein, ou encore $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

13. Soit $f$ une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, et $A = \{n \in \mathbb{N},\ n \notin f(n)\}$.

$A$ est alors une partie de $\mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $A = f(a)$, alors :

- si $a \in A$, alors $a \notin f(a)$, donc $a \notin A$ : c'est absurde,
- et si $a \notin A$, alors $a \in f(a)$, donc $a \in A$ : c'est absurde.

Il est donc impossible que $A$ admette un antécédent par $f$, donc $f$ n'est pas surjective, donc n'est pas bijective : il n'existe donc aucune bijection de $\mathbb{N}$ vers $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

14. Posons $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ f(A) = (1_A)_{n\in\mathbb{N}} = \left( \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

L'application $f$ est injective, car si $f(A) = u$, alors $A = \{n \in \mathbb{N},\ u_n = 1\}$ : l'ensemble $A$ peut donc être entièrement exprimé en fonction de $u$, l'antécédent de $u$ est donc unique.

On construit à présent une application $g : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ainsi : si $u$ est une suite de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, on pose $v$ la suite définie par :

$$v_0 = u_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n + u_{n+1} + 1.$$

La suite $v$ est alors strictement croissante puisque $u$ est à valeurs positives ou nulle (le $+1$ sert à rendre $v$ strictement croissante, pour qu'elle prenne des valeurs deux à deux distinctes), à valeurs dans $\mathbb{N}$, et on pose alors :

$$g(u) = \{v_n, n \in \mathbb{N}\} = \text{Im}(v).$$

L'application $g$ est bien à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, et elle est injective, car si $g(u) = E$, alors :

- $v_0 = \min(E)$, puis $u_0 = v_0 = \min(E)$.
- $v_1 = \min(E\backslash\{v_0\})$, puis $u_1 = v_1 - v_0 - 1$.
- et plus généralement, pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = \min(E\backslash\{v_0, \dots, v_n\}$ puis $u_{n+1} = v_{n+1} - v_n - 1$.

La suite $u$ peut donc être entièrement exprimée en fonction de $E$, donc $E$ admet un unique antécédent.

Enfin, puisqu'on dispose d'une injection de chacun des deux ensembles dans l'autre, d'après Cantor-Bernstein, il existe une bijection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ vers $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.