Topologie dans $\mathbb{C}$

- Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout réel a, on note $B(a,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{C}, |x-a| < \varepsilon\}$; c'est la **boule ouverte** de centre a et de rayon ε.

- **Remarque fondamentale** : la définition de la limite et de la continuité se réécrivent immédiatement avec des boules :
  - $u_n \to \ell$ si : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ u_n \in B(\ell,\varepsilon)$,
  - $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ si : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \rho > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ x \in B(a,\rho) \Longrightarrow f(x) \in B(\ell,\varepsilon)$,
  - f est continue en a si : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \rho > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ x \in B(a,\rho) \Longrightarrow f(x) \in B(f(a),\varepsilon)$.

I. Points intérieurs, parties ouvertes.

- Soit A une partie de $\mathbb{C}$. Un point $a \in \mathbb{C}$ est dit **intérieur** à A si :

$$\exists \varepsilon > 0,\ B(a,\varepsilon) \subset A.$$

- Une partie A de $\mathbb{C}$ est dite **ouverte** si tous ses points sont intérieurs.

1. (a) Soit I un ensemble non vide quelconque et $(O_i)_{i\in I}$ une famille de parties ouvertes de $\mathbb{C}$.

   Montrer que $\bigcup_{i\in I} O_i$ est encore une partie ouverte de $\mathbb{C}$.

   (b) Soit I un ensemble non vide **de cardinal fini** et $(O_i)_{i\in I}$ une famille de parties ouvertes de $\mathbb{C}$.

   Montrer que $\bigcap_{i\in I} O_i$ est encore une partie ouverte de $\mathbb{C}$.

2. Soit f une fonction continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

   Montrer que si A est une partie ouverte de $\mathbb{C}$, alors $f^{-1}(A)$ est une partie ouverte de $\mathbb{C}$.

3. $(*)$ Montrer que toute boule ouverte de rayon strictement positif est une partie ouverte de $\mathbb{C}$.

II. Intérieur d'une partie.

On note alors $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A, aussi appelé intérieur de A.

4. Justifier que pour toute partie A de $\mathbb{C}$, $\overset{\circ}{A} \subset A$.
5. Justifier que A est ouverte si et seulement si $\overset{\circ}{A} = A$.
6. Montrer que : $\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{C}),\ A \subset B \Longrightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.
7. Montrer que l'intérieur d'une partie quelconque est une partie ouverte.
8. Montrer enfin que pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$, $\overset{\circ}{A}$ est la plus grande partie ouverte de $\mathbb{C}$ incluse dans A.

III. Points adhérents, parties fermées.

- Soit A une partie de $\mathbb{C}$. Un point $a \in \mathbb{C}$ est dit **adhérent** à A si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ B(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

- Une partie A de $\mathbb{C}$ est dite **fermée** si tout point adhérent à A est dans A.

9. Montrer que tout élément de A est adhérent à A.
10. (a) Montrer que l'intersection d'une famille quelconque de parties fermées de $\mathbb{C}$ est une partie fermée de $\mathbb{C}$.
    (b) (**) Montrer que la réunion d'une famile finie de parties fermées de $\mathbb{C}$ est une partie fermée de $\mathbb{C}$.
11. (**) Montrer que l'image réciproque d'une partie fermée de $\mathbb{C}$ par une fonction continue est une partie fermée de $\mathbb{C}$.

IV. Adhérence d'une partie.

On note alors $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents de A, aussi appelé adhérence de A.

12. Montrer que : $\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{C}),\ A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
13. (**) Montrer que l'adhérence d'une partie quelconque de $\mathbb{C}$ est une partie fermée de $\mathbb{C}$.
14. En déduire que $\overline{A}$ est la plus petite partie fermée contenant A.

V. Parties séquentiellement fermées.

Une partie A de $\mathbb{C}$ est dite **séquentiellement fermée** si toute suite d'éléments de A qui converge dans $\mathbb{C}$ a sa limite dans A :

$$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ u_n \to \ell \in \mathbb{C} \Longrightarrow \ell \in A.$$

15. (a) Montrer que l'intersection d'une famille quelconque de parties séquentiellement fermées de $\mathbb{C}$ est une partie séquentiellement fermée de $\mathbb{C}$.
    (b) (*) Montrer que la réunion d'une famile finie de parties séquentiellement fermées de $\mathbb{C}$ est une partie séquentiellement fermée de $\mathbb{C}$.
16. Montrer que l'image réciproque d'une partie séquentiellement fermée de $\mathbb{C}$ par une fonction continue est une partie séquentiellement fermée de $\mathbb{C}$.

VI. Liens entre les parties ouvertes, fermées, séquentiellement fermées.

17. (a) Montrer que A est une partie fermée de $\mathbb{C}$ si et seulement si son complémentaire dans $\mathbb{C}$ est une partie ouverte de $\mathbb{C}$.
    (b) Montrer que A est une partie ouverte de $\mathbb{C}$ si et seulement si si son complémentaire dans $\mathbb{C}$ est une partie fermée de $\mathbb{C}$.
18. (a) Montrer que si A est fermée, A est séquentiellement fermée.
    (b) (*) Montrer que si A n'est pas fermée, A n'est pas séquentiellement fermée.
    (c) Conclure finalement que A est fermée si et seulement si A est séquentiellement fermée