

Chapitre 13 : Cardinal, dénombrement, coefficients binomiaux

I Lemmes préparatoires.

Lemme 1 : Construction de bijection.

Soit E_1 et E_2 deux ensembles disjoints, et F_1 et F_2 deux ensembles disjoints. On suppose qu'il existe une bijection de E_1 vers F_1 et une bijection de E_2 vers F_2 .

Alors il existe une bijection de $E_1 \sqcup E_2$ vers $F_1 \sqcup F_2$.

Preuve

On pose f une bijection de E_1 vers F_1 , et g une bijection de E_2 vers F_2 , puis h la fonction définie sur $E_1 \sqcup E_2$ par :

$$\forall x \in E_1 \sqcup E_2, h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E_1 \\ g(x) & \text{si } x \in E_2 \end{cases}$$

La fonction h est bien à valeurs dans $F_1 \sqcup F_2$, et surjective, car :

$$\text{Im}(h) = h(E_1 \sqcup E_2) = h(E_1) \cup h(E_2) = f(E_1) \cup g(E_2) = \text{Im}(f) \cup \text{Im}(g) = F_1 \cup F_2.$$

Soient alors $x, y \in E_1 \sqcup E_2$ tels que $h(x) = h(y)$, on distingue 3 cas :

- si x et y sont dans E_1 , alors $f(x) = f(y)$, puis $x = y$ car f est injective;
- si x et y sont dans E_2 , alors $g(x) = g(y)$, puis $x = y$ car g est injective;
- si $x \in E_1$ et $y \in E_2$, alors $h(x) = f(x) \in F_1$, et $h(y) = g(y) \in F_2$: l'égalité de $f(x)$ et $g(y)$ assure alors que $F_1 \cap F_2$ est non vide, c'est absurde.

Le dernier cas, où $x \in E_2$ et $y \in E_1$, est symétrique. Dans tous les cas non absurdes, on a bien $x = y$, et h est bien injective : c'est une bijection de $E_1 \sqcup E_2$ vers $F_1 \sqcup F_2$.

Lemme 2 : Une bijection particulière.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et $a \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Il existe une bijection de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ vers $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{a\}$.

Preuve

La fonction $f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \leq a-1 \\ x+1 & \text{si } x \geq a \end{cases}$ convient.

Lemme 3 : Fonctions injectives de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers lui-même.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Toute fonction injective de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers lui-même est bijective.

Preuve

On raisonne par récurrence sur n .

- Pour $n = 1$, soit f une fonction injective de $\{1\}$ vers $\{1\}$: alors f est la fonction identité, qui est bijective.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que toute fonction injective de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers lui-même est bijective.

Soit alors f une fonction injective de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ vers lui-même.

Si $n+1 \notin \text{Im}(f)$, alors f est injective et à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, donc la restriction de f à $\llbracket 1, n \rrbracket$ est une fonction injective de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers lui-même : elle est bijective d'après la propriété de récurrence, donc atteint tous les éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Or $f(n+1) \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donc admet au moins 2 antécédents : un dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, et $n+1$: on en déduit que f n'est pas injective, c'est absurde.

On en déduit donc que $n+1 \in \text{Im}(f)$, et on note a son antécédent.

La restriction de f à $\llbracket 1, n+1 \rrbracket \setminus \{a\}$ est alors une injection de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket \setminus \{a\}$ vers $\llbracket 1, n \rrbracket$ (en effet $n+1$ admet un unique antécédent puisque f est injective, donc les autres valeurs sont dans $\llbracket 1, n \rrbracket$).

Notons $\tilde{f}$ cette dernière restriction. Rappelons qu'il existe une bijection g de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket \setminus \{a\}$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$: la fonction $\tilde{f} \circ g^{-1}$ est alors une injection (composée de deux injections) de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers $\llbracket 1, n \rrbracket$. La propriété de récurrence assure alors qu'elle est bijective. Comme g l'est aussi, la composée $(\tilde{f} \circ g^{-1}) \circ g$ est encore bijective, ou encore $\tilde{f}$ est bijective.

On en déduit finalement que $\tilde{f}$ est surjection, donc atteint tous les éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$: l'image de f contient donc tous les éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$, et on a vu qu'elle contenait $n+1$: f est surjective, et donc bijective.

- D'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toute fonction injective de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers lui-même est bijective.

Lemme 4 : Unicité du cardinal.

Soient p et n deux entiers naturels non nuls, et E un ensemble.

- S'il existe une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers $\llbracket 1, p \rrbracket$, alors $n = p$.
- S'il existe une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers E et une bijection de $\llbracket 1, p \rrbracket$ vers E , alors $n = p$.

Preuve

- Supposons qu'il existe une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers $\llbracket 1, p \rrbracket$, qu'on note f . Par symétrie des rôles, on peut supposer sans perte de généralité que $n \leq p$.

La restriction de f à $\llbracket 1, n \rrbracket$ est alors une injection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers lui-même, donc elle est bijective.

On en déduit que $f(p)$ admet un antécédent dans $\llbracket 1, n \rrbracket$; or p est injective, donc cet antécédent ne peut être que p : on en déduit que $p \leq n$, et finalement $n = p$.

- En notant f et g ces deux bijections, $g^{-1} \circ f$ est une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers $\llbracket 1, p \rrbracket$, donc $n = p$.

II Cardinal : définition et premières propriétés.

Définition 1 : Cardinal.

- Un ensemble E est dit de cardinal fini s'il est vide ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une fonction f bijective de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers E .
- S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une fonction bijective de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers E , n est unique : cet entier est appelé **cardinal** de E , et noté $\text{Card}(E)$ ou $\#E$.
- Par convention, on dit que le cardinal de $\emptyset$ vaut 0.

Propriété 5

- $\#(E \sqcup F) = \#E + \#F$ et plus généralement, $\# \bigsqcup_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n \#E_i$.
- Si $E \subset F$, alors $\#E \leq \#F$.
- $\#A \setminus B = \#A - \#(A \cap B)$.
- $\#E = \#F$ si et seulement si il existe une bijection de E vers F .
- Si f est une injection de E vers F et $\#E = \#F$, alors f est bijective.

Preuve

- Notons $n = \#E$ et $p = \#F$: il existe une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers E et une bijection de $\llbracket 1, p \rrbracket$ vers F .

Or la fonction $g : x \mapsto x - n$ est une bijection de $\llbracket n+1, n+p \rrbracket$ vers $\llbracket 1, p \rrbracket$, et la composée de deux bijections est une bijection : il existe donc une bijection de $\llbracket n+1, n+p \rrbracket$ vers F .

D'après le premier lemme préparatoire, comme $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $\llbracket n+1, n+p \rrbracket$ d'une part, et E et F d'autre part, sont disjoints, il existe une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket \sqcup \llbracket n+1, n+p \rrbracket$, c'est-à-dire $\llbracket 1, n+p \rrbracket$, vers $E \sqcup F$.

On en déduit donc que $\#(E \sqcup F) = n + p = \#E + \#F$.

La généralisation s'obtient par récurrence immédiate, car $\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i = \left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right) \sqcup E_{n+1}$.

- On remarque que $F = E \sqcup (F \setminus E)$, donc $\#F = \#E + \#F \setminus E \geq \#E$.
- On remarque que $A = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B)$, donc $\#A = \#A \setminus B + \#(A \cap B)$, et le résultat annoncé s'en déduit immédiatement.
- Soit $n = \#E$ et $p = \#F$: il existe des bijections f et g respectivement de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers E et de $\llbracket 1, p \rrbracket$ vers F .
 - Supposons que $n = p$: la fonction $f \circ g^{-1}$ est une bijection de E vers F .
 - Supposons qu'il existe une bijection h de E vers F . Alors $g^{-1} \circ h \circ f$ est une bijection (composée de 3 bijections) de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers $\llbracket 1, p \rrbracket$, donc $n = p$.
- Soit n le cardinal commun de E et F , et f une injection de E vers F .

Il existe des bijections g et h de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers E et F respectivement : la fonction $h^{-1} \circ f \circ g$ est une injection (composée de trois injections) de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers $\llbracket 1, n \rrbracket$: d'après le deuxième lemme préparatoire, c'est une bijection.

Mais la composée de trois bijections étant une bijection, la fonction $h \circ (h^{-1} \circ f \circ g) \circ g^{-1}$ est alors une bijection de E vers F , ou encore f est une bijection de E vers F .

III Quelques cardinaux usuels.

Propriété 6

Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$, E un ensemble de cardinal n , et F un ensemble de cardinal p .

- $\#(E \times F) = n \times p$.
- $\#E^p = n^p$.
- $\#\mathcal{F}(E, F) = p^n$.
- L'ensemble des p -listes d'éléments deux à deux distincts de E est de cardinal $n(n-1)\dots(n-p+1)$ ou encore $\frac{n!}{(n-p)!}$:

$$\begin{aligned} \# \left(\left\{ (e_1, \dots, e_p) \in E^p, e_1, \dots, e_p \text{ deux à deux distincts} \right\} \right) &= n(n-1)\dots(n-p+1) \\ &= \frac{n!}{(n-p)!} \end{aligned}$$

- $\#\{f \in \mathcal{F}(E, F), f \text{ est injective}\} = p(p-1)\dots(p-n+1) = \frac{p!}{(p-n)!}$.
- L'ensemble des bijections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans E est de cardinal $n!$:

$$\# \left(\left\{ f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow E, f \text{ est bijective} \right\} \right) = n!.$$

- $\#\mathcal{P}(E) = 2^n$.

Preuve

- On remarque d'abord que pour tout $f \in F$, la fonction $x \mapsto (x, f)$ est une bijection de E vers $E \times \{f\}$, donc $\#E \times \{f\} = \#E = n$.

Notons alors $f_1, \dots, f_p$ les éléments de F (possible car il existe une bijection de $\llbracket 1, p \rrbracket$ vers F), on a :

$$E \times F = \bigsqcup_{i=1}^p E \times \{f_i\}$$

En effet :

- l'inclusion de droite à gauche est immédiate car $\{f_i\}$ est inclus dans F pour tout i , donc $E \times \{f_i\}$ est inclus dans $E \times F$, et la réunion de $E \times F$ est $E \times F$;
- l'inclusion de gauche à droite est immédiate car si $(e, f) \in E \times F$, il existe i tel que $f = f_i$, donc $(e, f) = (e, f_i) \in E \times \{f_i\}$ et (e, f) appartient bien à la réunion de $E \times \{f_i\}$;
- enfin la réunion est deux à deux disjointe, car si $i \neq j$, $f_i \neq f_j$, donc un couple ne peut être à la fois de la forme (e, f_i) et (e, f_j) .

On en déduit donc que :

$$\#(E \times F) = \sum_{i=1}^p \#E \times \{f_i\} = \sum_{i=1}^p n = n \times p.$$

- Une récurrence immédiate à partir de la question précédente montre que pour tout $p \geq 2$ et pour tous ensembles finis $E_1, \dots, E_p$, on a :

$$\#(\dots(E_1 \times E_2) \times E_3) \times \dots \times E_p = \prod_{i=1}^p \#E_i.$$

Or la fonction $(x_1, \dots, x_p) \mapsto (\dots((x_1, x_2), x_3), \dots), x_n)$ est une bijection de $\prod_{i=1}^p E_i$ vers $(\dots(E_1 \times E_2) \times E_3) \times \dots \times E_p$, donc on a :

$$\#\prod_{i=1}^p E_i = \#(\dots(E_1 \times E_2) \times E_3) \times \dots \times E_p = \prod_{i=1}^p \#E_i.$$

Il n'y a plus qu'à utiliser cette propriété dans le cas particulier où tous les E_i sont égaux à E pour obtenir que $\#E^p = n^p$.

- On note $e_1, \dots, e_n$ les éléments de E (possible car il existe une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers E).

La fonction $\varphi : \mathcal{F}(E, F) \rightarrow F^n$ qui à f associe $(f(e_1), \dots, f(e_n))$, est une bijection : en effet la fonction $\psi : F^n \rightarrow \mathcal{F}(E, F)$ qui à $(x_1, \dots, x_n)$ associe la fonction $f : e_1 \mapsto x_1, e_2 \mapsto x_2, \dots, e_n \mapsto x_n$ vérifie $\varphi \circ \psi = \text{id}$ et $\psi \circ \varphi = \text{id}$.

On en déduit donc que :

$$\#\mathcal{F}(E, F) = \#F^n = (\#F)^n = p^n.$$

- On le prouve par récurrence sur $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- Si $p = 1$, une liste à 1 élément de E est un élément de E : le cardinal recherché vaut bien n .
- Soit $p \leq n - 1$, on suppose que le nombre de p -listes d'éléments deux à deux distincts de E vaut $\frac{n!}{(n-p)!}$.

Toute $(p+1)$ -liste d'éléments deux à deux distincts de E peut être vue comme la donnée d'un premier élément a de E , puis d'une p -liste d'éléments deux à deux distincts de $E \setminus \{a\}$: avec n choix pour le premier élément, et $\frac{(n-1)!}{(n-1-p)!}$ choix pour la p -liste qui suit, il y a donc $\frac{n \times (n-1)!}{(n-1-p)!}$, ou encore $\frac{n!}{(n-(p+1))!}$ $(p+1)$ -listes d'éléments deux à deux distincts de E .

- Le principe de récurrence donne donc le résultat annoncé.

- La fonction φ vue plus haut envoie clairement une n -liste d'éléments deux à deux distincts sur une fonction injective, et sa réciproque ψ envoie clairement une fonction injective vers une p -liste d'éléments deux à deux distincts.

La restriction de φ à l'ensemble des n -listes d'éléments deux à deux distincts de E est donc une bijection dans l'ensemble des fonctions injectives de E dans F , et le résultat annoncé s'en suit immédiatement.

- Comme $\#E = n = \#\llbracket 1, n \rrbracket$, une fonction de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans E est bijective si et seulement si elle est injective : la question précédente s'applique alors, avec $p = n$ donc le cardinal recherché est $\frac{n!}{(n-n)!}$, ou encore $n!$.

- Pour toute A de E , on pose une fonction $f_A : E \mapsto \{1, 2\}$ définie par :

$$\forall x \in E, f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 2 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

La fonction $\varphi : A \mapsto f_A$ est alors une fonction de $\mathcal{P}(E)$ vers $\mathcal{F}(E, \{1, 2\})$; et elle est bijective, car la fonction $\psi : f \mapsto f^{-1}(\{1\})$ est une fonction de $\mathcal{F}(E, \{1, 2\})$ vers $\mathcal{P}(E)$ vérifiant $\psi \circ \varphi = \text{id}$ et $\varphi \circ \psi = \text{id}$.

La question précédente assure alors que :

$$\#\mathcal{P}(E) = \#\mathcal{F}(E, \{1, 2\}) = 2^n.$$

Remarque

Les résultats précédents s'interprètent ainsi en terme de dénombrement :

- Il y a exactement n manières distinctes de choisir un objet parmi n disponibles.
- Il y a exactement $n \times n'$ manières distinctes de choisir un objet parmi n disponibles **puis** (donc l'ordre compte) un objet parmi n' disponible.

(on le visualise avec un arbre de dénombrement à deux épreuves ayant respectivement n puis n' résultats possibles, pour chaque possibilité pour l'objet 1, il y a n' possibilités pour choisir l'objet 2).

- Il y a exactement n^p manières distinctes de choisir p fois **successivement** (donc l'ordre compte) et **avec remise** (donc il y en a n à chaque choix) un objet parmi n disponibles.

(on le visualise avec un arbre de dénombrement avec p épreuves ayant chacune n résultats possibles).

- Il y a exactement $n(n-1) \dots (n-p+1)$, ou encore $\frac{n!}{(n-p)!}$ manières distinctes de choisir p fois successivement (donc l'ordre compte) et **sans remise** (donc il y en a un de moins à chaque choix) un objet parmi n disponibles.

(on le visualise avec un arbre de dénombrement avec p épreuves ayant respectivement n , puis $n-1$, puis ..., puis $n-(p-1)$ résultats possibles).

- Il y a exactement $n!$ manières distinctes d'ordonner n objets.

IV Coefficients binomiaux.

Définition 2 : Ensemble des parties de cardinal k d'un ensemble.

Soit E un ensemble et $k \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{P}_k(E)$ l'ensemble des parties à k éléments de E .

Définition 3 : Coefficient binomiaux.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On définit alors $\binom{n}{k}$, qui se lit "k parmi n", comme le nombre de parties à k éléments de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ (où, pour $n = 0$, on convient que $\llbracket 1, 0 \rrbracket = \emptyset$), ou encore :

$$\binom{n}{k} = \#\mathcal{P}_k(\llbracket 1, n \rrbracket)$$

Propriété 7

Soit E un ensemble quelconque à n éléments, on a $\#\mathcal{P}_k(E) = \binom{n}{k}$.

Preuve

E admet le même nombre d'éléments que $\llbracket 1, n \rrbracket$, on peut donc définir une bijection f de E dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On peut alors définir une bijection de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ en associant, à $A \subset E$, le sous-ensemble $f(A)$ de $\llbracket 1, n \rrbracket$; la bijection réciproque est $A \mapsto f^{-1}(A)$.

De plus cette bijection et sa réciproque envoient chaque ensemble à k éléments dans un ensemble à k éléments, elles induisent donc des bijection de $\mathcal{P}_k(E)$ dans $\mathcal{P}_k(\llbracket 1, n \rrbracket)$ et réciproquement : ces deux ensembles sont donc en bijection, ils ont bien le même cardinal.

Remarque

Plus généralement, en terme de dénombrement, $\binom{n}{k}$ représente le nombre de manières distinctes de choisir (simultanément) k objets (qui sont donc deux à deux distincts!) parmi n disponibles.

Propriété 8 : Cas particuliers.

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad , \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.$$

Preuve

- Il est clair que $\mathcal{P}_0(\llbracket 1, n \rrbracket) = \{\emptyset\}$ et $\mathcal{P}_n(\llbracket 1, n \rrbracket) = \{\llbracket 1, n \rrbracket\}$, et ils sont bien de cardinal 1.
- Il est clair que $\mathcal{P}_1(\llbracket 1, n \rrbracket) = \{\{k\}, k \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$, et la fonction $\varphi : x \mapsto \{x\}$ est une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers cet ensemble.

De même, $\mathcal{P}_{n-1}(\llbracket 1, n \rrbracket) = \{\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{k\}, k \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$, et la fonction $\varphi : x \mapsto \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{x\}$ est une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers cet ensemble.

Propriété 9 : Symétrie des coefficients binomiaux.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a toujours :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Preuve

Soit E un ensemble de cardinal n : la fonction φ de $\mathcal{P}(E)$ vers lui-même qui à A associe $E \setminus A$ vérifie $\varphi \circ \varphi = \text{id}$: elle est bijective, et elle est sa propre réciproque.

Or il est clair que pour tout entier k , $\varphi(\mathcal{P}_k(E)) \subset \mathcal{P}_{n-k}(E)$; et comme φ est injective, on en déduit que :

$$\#\varphi(\mathcal{P}_k(E)) = \#\mathcal{P}_k(E) \leq \#\mathcal{P}_{n-k}(E) \quad \text{ou encore} \quad \binom{n}{k} \leq \binom{n}{n-k}.$$

Mais en appliquant cette inégalité pour $k' = n - k$, on obtient aussi $\binom{n}{n-k} \leq \binom{n}{k}$ (car $n - (n - k) = k$), et on a bien l'égalité.

Propriété 10 : Formule du triangle de Pascal.

Soit $n \in \mathbb{N}$, et $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On a :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

(cette relation reste vraie pour $k \in \mathbb{N}$ si on considère que $\binom{n}{k}$ est nul dès que $k > n$ (parfaitement logique avec la définition combinatoire des coefficients binomiaux).

Preuve

Soit n et k des entiers naturels. On se donne E un ensemble de cardinal n , $a \notin E$ et $F = E \cup \{a\}$, qui est donc de cardinal $n+1$.

On va compter de deux manières différentes le cardinal de $\mathcal{P}_{k+1}(F)$:

- F étant de cardinal $n+1$, $\#\mathcal{P}_{k+1}(F) = \binom{n+1}{k+1}$.
- Les parties à $k+1$ éléments de F peuvent être incluses dans E ou non : on va compter le nombre de chaque.
 - Une partie à $k+1$ éléments de F incluse dans E est une partie à $k+1$ éléments de E : il y en a $\binom{n}{k+1}$.
 - Une partie à $k+1$ éléments de F non incluse dans E doit contenir a , et une partie à k éléments de E : il y en a $\binom{n}{k}$.

On en déduit donc qu'il y a exactement $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$ parties à $k+1$ éléments de F . Et finalement le cardinal de $\mathcal{P}_{k+1}(F)$ étant unique, on a bien :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

Propriété 11

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Cas particuliers :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad , \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad , \quad \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Preuve

Soit E un ensemble à n éléments, on calcule de deux manières le nombre $L(n, k)$ de k -listes d'éléments deux à deux distincts de E :

- En choisissant les k éléments de la liste un par un et sans remise, on a déjà vu que :

$$L(n, k) = n(n-1) \dots (n-(k-1)) = n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- En choisissant d'abord simultanément les k éléments de la liste, puis en comptant le nombre de manières de les ordonner, on a cette fois :

$$L(n, k) = \binom{n}{k} \times k!$$

On en déduit alors que :

$$\binom{n}{k} \times k! = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \text{et par suite} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Preuve

Prouvons par le calcul les propriétés déjà vues des coefficients binomiaux.

- **Symétrie.**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a :

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

- **Triangle de Pascal.** Regardons la valeur du coefficient $\binom{n+1}{k+1}$, puis simplifions la somme pour arriver à la même expression :

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$$

Simplifions la somme :

$$\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Il est ici **fondamental** de visualiser correctement le dénominateur commun : $(k+1)!(n-k)!$: on a alors :

$$\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \frac{n! \times (n-k)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n! \times (k+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n![n-k+k+1]}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$$

et on obtient bien la même expression que pour le coefficient binomial de départ, d'où l'égalité.

V Formule du binôme de Newton.

Propriété 12 : Formule du binôme de Newton.

Soit a et b deux nombres complexes, et n un entier naturel. On a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Preuve

Une fois la première égalité prouvée, la deuxième est évidente par symétrie des rôles de a et de b : concentrons-nous sur cette première égalité.

• **Première preuve : par récurrence.**

Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

– **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $(a+b)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$ (un seul terme dans la somme, $k = 0$) : on a donc bien l'égalité.

– **Hérédité** : pour n fixé quelconque dans $\mathbb{N}$, on veut prouver que la propriété au rang n implique celle au rang $n+1$.

Supposons donc que la propriété soit vraie au rang n , c'est-à-dire que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, et montrons la propriété au rang $n+1$. Pour cela commençons par utiliser la relation de récurrence, puis l'hypothèse de récurrence :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b) = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) \times (a+b) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

Changeons d'indice dans la première somme pour faire apparaître les mêmes puissances que dans la seconde et rassembler les deux sommes astucieusement : on pose donc $k' = k+1$ dans la première somme, on a :

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} = \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1} \end{aligned}$$

On reconnaît les termes d'ordre 0 et $n+1$ de la somme, car $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$, et on obtient bien :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

– **Conclusion** : d'après le principe de récurrence, on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

• **Deuxième preuve : par dénombrement.**

L'idée est de visualiser le développement, par distributivité, du produit :

$$(a+b)^n = \prod_{k=1}^n (a+b) = (a+b) \times \cdots \times (a+b)$$

On va retrouver des termes composés d'un produit de n facteurs a ou b (un par facteur $(a+b)$ du départ) ; on peut remarquer qu'il y aura 2^n termes car on effectue n fois consécutivement un choix à deux possibilités.

On va ranger ces termes selon les puissances de a : la puissance de a peut aller de 0 (on a pris b à chaque fois) à n (on a pris a à chaque fois), et si elle vaut k , la puissance de b vaudra $n-k$ puisqu'on multiplie n facteurs valant a ou b : s'il y en a k égaux à a , les $(n-k)$ autres valent tous b . En notant $m(n, k)$ le nombre de fois que le terme $a^k b^{n-k}$ apparaîtra dans le développement de $(a+b)^n$, on a donc :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n m(n, k) a^k b^{n-k}.$$

Il reste à déterminer $m(n, k)$, c'est-à-dire à compter le nombre de fois où le terme $a^k b^{n-k}$ apparaîtra dans le développement, ou encore à **dénombrer** le nombre d'ordres possibles pour ranger k facteurs a et $(n-k)$ facteurs b (car il y aura autant de termes que d'ordres dans lesquels choisir les a et les b dans la distributivité).

Pour dénombrer ce nombre d'ordres, regardons comment en construire un quelconque : pour cela il suffit de placer d'abord les a , puis les b ; pour placer les a il faut choisir k positions parmi les n possibles, il y a donc $\binom{n}{k}$ manières possibles ; puis, **sachant les a déjà placés**, il ne reste qu'une manière de placer les b : ils doivent prendre toutes les positions restantes (on peut aussi voir qu'on doit choisir $(n-k)$ positions parmi les $(n-k)$ restantes, puisqu'il y avait n positions au départ et que k sont déjà occupées par les a). Au final on obtient

$$m(n, k) = \binom{n}{k} \times \binom{n-k}{n-k} = \binom{n}{k} \times 1 = \binom{n}{k}$$

et enfin :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$