

*Université Ferhat Abbas –Sétif-*

*Faculté de technologie*

*Tronc commun Sciences et Techniques*

*Cours Physique 3*

*(Vibrations)*

*Par : Dr. N.Aklouche*

*Année universitaire : 2011-2012*



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

(وَتَرَى الْأَرْضَ هَامِدَةً فَإِذَا أَنْزَلْنَا عَلَيْهَا الْمَاءَ اهْتَزَّتْ وَرَبَّتْ وَأَنْبَتْتُ مِنْ كُلِّ زَوْجٍ بَهِيجٍ )

سورة الحج

## **Programmes Vibrations**

### **Chapitre 1: Généralités sur les vibrations. Systèmes linéaires à un degré de liberté**

Définition d'un mouvement vibratoire. Exemples de systèmes vibratoires. Mouvements périodiques.

Les oscillations libres. L'oscillateur harmonique. Pulsation propre d'un oscillateur harmonique. L'énergie d'un oscillateur harmonique

### **Chapitre 2 : Les oscillations libres amorties**

Forces d'amortissement. Équation des mouvements. Oscillations pseudo périodiques (décrément logarithmique, facteur de qualité). Analogie entre systèmes oscillants mécaniques et électriques

### **Chapitre 3 : Les oscillations amorties forcées**

Définition. Cas d'une excitation sinusoïdale (résonance, déphasage). Cas d'une excitation périodique quelconque.

Équation des mouvements. Régime transitoire, régime permanent. Bande passante. Facteur de qualité

### **Chapitre 4 : Systèmes linéaires à plusieurs degrés de liberté**

Systèmes à 2 degrés de liberté. Libres (pulsations propres)

Systèmes à N degrés de liberté

## **Références**

Mini manuel de mécanique du point, Henry, M. Delorme, N.

Fundamentals Of Physics Extended 8<sup>th</sup> Edition By Halliday

Vibrations and waves, George C. King

The physics of vibrations and waves, Sixth Edition, H. J. Pain

Cours de vibrations I, Emmanuel Vient

Waves and Oscillations, R.N. Choudhuri .....etc

## Introduction générale

**Les phénomènes vibratoires jouent un rôle déterminant dans presque toutes les branches de la physique: mécanique, électricité, optique, acoustique, etc. Malgré leur grande diversité, ils sont régis, en tout cas dans le domaine linéaire, par les mêmes lois de comportement et peuvent être étudiés au moyen du même outil mathématique. L'homme s'est intéressé aux phénomènes vibratoires lorsqu'il a construit les instruments de musiques.**

**Malgré les connaissances acquises par les anciens, il faut attendre le début du 17e siècle pour que Galilée (1564-1642) démontre que le ton d'un son est déterminé par la fréquence des vibrations.**

Très longtemps, on a étudié les vibrations des machines et des structures presque uniquement dans le but de les atténuer et, si possible, de les supprimer. Cette préoccupation est encore essentielle mais n'est pas la seule. On construit actuellement de plus en plus de machines ou d'appareils qui utilisent les vibrations mécaniques pour remplir la fonction désirée. Les vibrations sont parfois perturbatrices et doivent être combattues dans plusieurs domaines par exemple :

- Les machines ou certains organes de machine sont une cause d'imprécision, de bruit, d'usure prématuée et de fissure, entraînant finalement la rupture de la pièce.
- Les vibrations des voitures, des avions, des trains ou des bateaux provoquent, en plus des inconvénients précédents, l'inconfort des voyageurs et diminuent parfois la sécurité de conduite de ces véhicules.
- Les vibrations des grandes structures métalliques peuvent prendre, dans certains cas, des proportions catastrophiques.

Dans ces chapitres, nous allons étudier le comportement des systèmes avec un ou plusieurs degrés de liberté. Nous allons nous limiter à des systèmes où les équations de mouvement sont des équations différentielles linéaires. Ce qui nous permet de décrire de diverses caractéristiques importantes de vibrations. Vous apprendrez à analyser les vibrations libres et forcées avec ou sans amortissement.

# CHAPITRE I

## Oscillations libres non amorties : Système à un degré de liberté

### I.1 Généralités sur les vibrations

#### I.1.1 Mouvement périodique :

**Définition :** C'est un mouvement qui se répète à intervalles de temps réguliers, cet intervalle est appelé période ( $T$ ) qui s'exprime en seconde (s).

Pour les mouvements rapides, on utilise la fréquence :  $f$  exprimée en Hertz (HZ)

#### I.1.2 Mouvement vibratoire :

**Définition :** Un mouvement vibratoire est un mouvement périodique se produisant de part et d'autre d'une position d'équilibre. On peut aussi définir un mouvement vibratoire par sa fréquence  $f$ . La fréquence indique le nombre d'oscillations complètes (dans le sens aller retour) se produisant par seconde.

On peut établir la relation entre la fréquence et la période :

$$T = \frac{1}{f} \quad \text{et} \quad f = \frac{1}{T}$$

La période  $T$  des oscillations est le temps mis par le système pour revenir à une position identique quelque soit le choix de cette position. C'est aussi, le temps mis pour faire une oscillation complète ou un « aller-retour ».

Mathématiquement, le mouvement périodique de période  $T$  est défini par:

$$\text{A tout instant } t, \quad x(t + T) = x(t)$$

#### I.1.3 Mouvement vibratoire libre

**Définition :** les vibrations libres sont les vibrations qui résultent lorsqu'on écarte un système de sa position d'équilibre ou on lui donne une vitesse initiale, puis on le laisse vibrer librement.

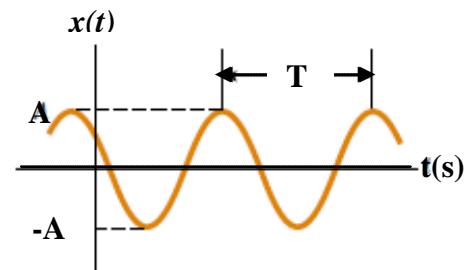
**Exemples :** Une masse accrochée à un ressort - un pendule simple - le balancier d'une horloge - la rotation d'un moteur tournant à vitesse constante..... etc.

#### I.1.4 Mouvement vibratoire sinusoïdal

**Définition :** un mouvement vibratoire est sinusoïdal, si un point vibrant possède une élévation du type :

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

- La grandeur  $y(t)$  est appelée l'élévation (ou la position) à l'instant  $t$ , l'élévation maximale ou l'amplitude du mouvement, elle varie entre  $-A$  et  $+A$ .
- La quantité  $\omega$  est la pulsation du mouvement et exprimée en  $(rad/s)$ .
- La quantité  $(\omega t + \varphi)$  est la phase instantanée, exprimée en (radian, sans dimension),
- l'angle  $\varphi$  est la phase initiale, correspond à la phase à l'instant  $t = 0$ .



### I.2 Vibration harmonique

**Définition :** On appelle vibration harmonique tout système dont le paramètre  $x(t)$  qui la caractérise est une fonction sinusoïdale du temps :  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

- La fonction cosinus est une fonction périodique de période  $2\pi$ . Si  $T$  est la période temporelle du mouvement, on aura donc :

$$[\omega(t + T) + \varphi] - [\omega t + \varphi] = 2\pi \Rightarrow \omega T = 2\pi$$

On en déduit l'expression de  $T$  en fonction de la pulsation :  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

- La fréquence  $f$ , nombre d'oscillations par seconde correspond à l'inverse de la période  $T$  :  $f = 1/T$ . Il existe d'autres expressions équivalentes pour la fonction  $x(t)$ . En effet, la fonction sinus est équivalente à la fonction cosinus décalée de  $\pi/2$ . On peut donc écrire :

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) = A \sin(\omega t + \phi)$$

### Donc :

Les grandeurs caractéristiques d'une vibration harmonique sont :

- L'amplitude  $A$ ,
- La période  $T$ ,  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ ;  $\omega$ : pulsation,  $f$ : fréquence.
- La phase  $\varphi$ .

### I.2.1 Coordonnées généralisées d'un système physique

**Définition :** Les coordonnées Généralisées sont l'ensemble de variables réelles **indépendantes** ou **liées** permettant de décrire et configurer tous les éléments du système à tout instant  $t$ .

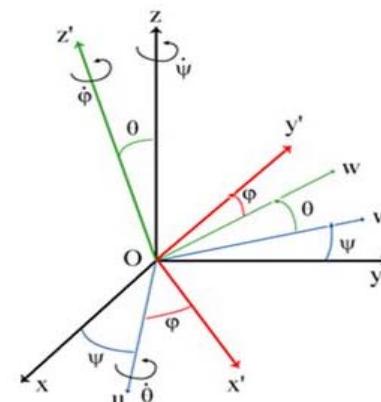
### Par exemples :

- un point matériel libre dans l'espace peut être déterminé par 3 coordonnées généralisées ( $x, y, z$ );
- un corps solide peut être déterminé par 6 coord. génér. :
  - 03 coordonnées relatives au centre de gravité;
  - 03 coordonnées liées aux angles d'Euler ( $\varphi, \psi, \theta$ ).
- Les coordonnées généralisées d'un système de  $P$  points matériels et  $Q$  corps solides sont défini par :  $N = 3P + 6Q$

### On note :

Les coordonnées généralisées :  $q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t)$ .

Les vitesses généralisées :  $\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_N(t)$ .



### I.2.2 Degré de liberté

**Définition :** Le degré de liberté est le nombre de coordonnées généralisées indépendantes, nécessaires pour configurer tous les éléments du système à tout instant :  $d = N$

Où, le nombre de coordonnées généralisées liées, pour configurer tous les éléments du système à tout instant moins (-) le nombre de relations reliant ces coordonnées entre elles :  $d = N - r$

$d$ : Degré de liberté ;

$N$  : Nombre de coordonnées généralisées

$r$  : Nombre de relations reliant ces coordonnées entre elles.

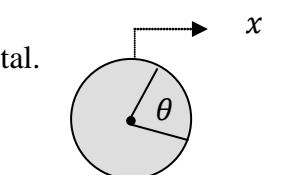
### Exemples :

- Un disque de masse  $m$  et de rayon  $r$ , roule sans glisser sur un plan horizontal.

Ici on a deux coordonnées généralisées  $x$  et  $\theta$  donc  $N = 2$ .

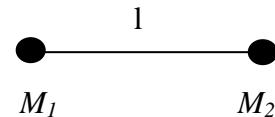
$x$  et  $\theta$  sont liées avec une relation:  $x = r\theta$  donc :  $r = 1$ .

Le nombre de degrés de liberté  $d = N - r = 1$ .



- Un système mécanique constitué de 02 points matériels  $M_1$  et  $M_2$  reliés d'une tige de longueur l.
- $$\left. \begin{array}{l} M_1(x_1, y_1, z_1) : 3 \\ M_2(x_2, y_2, z_2) : 3 \end{array} \right\} \Rightarrow N = 6$$

L'équation de liaison :  $l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = c^{\text{te}}$



$$\Rightarrow r = 1 \Rightarrow d = 5$$

### I.3 Equation différentielle du mouvement

Dans ce cours, on établit l'équation différentielle en utilisant le formalisme de Lagrange. L'intégration de cette dernière permet de donner l'équation du mouvement.

#### I.3.1 Formalisme de Lagrange

Ce formalisme repose sur la fonction de Lagrange ( $L = T - U$ ). L'ensemble d'équations du mouvement s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \right\} = 0$$

- L : Fonction de Lagrange ou Lagrangien
- T : L'énergie cinétique du système;
- U : L'énergie potentielle du système ;
- $q_i$  : est la coordonnée généralisée et  $\dot{q}_i$  est la vitesse généralisée du système.

Pour un système à un degré de liberté, ( $N=1$  ou  $ddl=1$ ) l'équation du mouvement s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right) = 0$$

#### Remarques :

- Pour un mouvement unidimensionnel  $x$ , l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x} \right) = 0$$

- Pour un mouvement rotationnel  $\theta$ , l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = 0$$

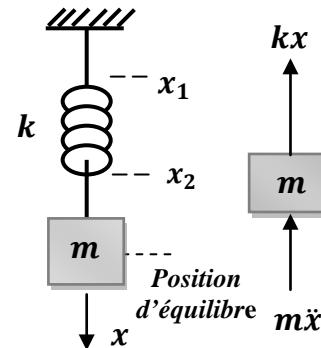
#### I.3.2 Exemples d'oscillateurs harmoniques

##### Exemple 1 : Pendule élastique vertical

Un pendule élastique est constitué d'une masse suspendue à un ressort de raideur  $k$  et peut donc osciller verticalement avec une élongation  $x(t)$ .

Le système nécessite une seule coordonnée généralisée  $x(t)$  qui peut décrire le mouvement de la masse  $m$  et de l'extrémité mobile du ressort.

Donc le système a un seul degré de liberté  $d=N=1$ .



- L'énergie cinétique du système:**  $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$
- L'énergie potentielle du système:** l'énergie  $U$  emmagasinée dans le ressort dépend de l'allongement des 2 extrémités du ressort. Elle s'exprime:

$$U = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{avec } x_2 = x; x_1 = 0$$

$$\left[ dU = \vec{F}_r \cdot \vec{dx} = -(-kx dx) \Rightarrow U = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2}kx^2 \right]$$

La fonction de Lagrange :  $L = T - U \Rightarrow L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$

L'équation de Lagrange :  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x} \right) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \end{array} \right\} \Rightarrow m\ddot{x} - (-kx) = 0$$

$$\text{On divisant par } m \quad \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Le rapport  $\frac{k}{m}$  étant positif et en posant :  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  on obtient l'équation différentielle d'une vibration

harmonique de la forme :  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ .

- ✓ La pulsation  $\omega_0$  ne dépend que de la masse  $m$  et de la raideur  $k$  du ressort, est appelée « **la pulsation propre** » du système.
- ✓ La masse oscille donc indéfiniment avec une période propre  $T_0$  donnée par la relation suivante:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

### Exemple 2 : Pendule pesant simple

Un pendule simple est constitué d'un solide de petite dimension de masse  $m$  suspendu à un point fixe  $O$  par un fil inextensible de longueur  $L$ . Ecarté de sa position d'équilibre, il oscille dans le champ de pesanteur terrestre  $g$ .

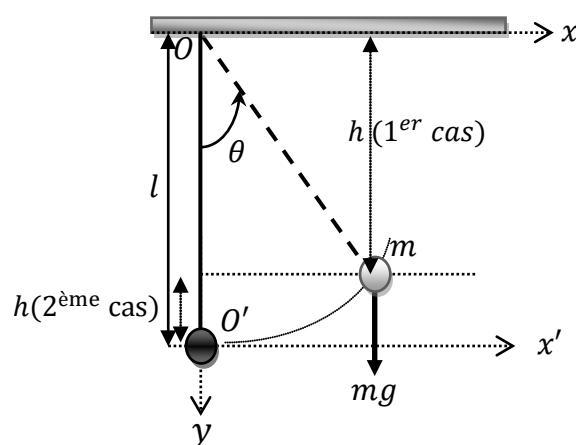
#### Les coordonnées du système :

$$m \begin{cases} x = l \sin \theta \Rightarrow \dot{x} = l\dot{\theta} \cos \theta \\ y = l \cos \theta \Rightarrow \dot{y} = -l\dot{\theta} \sin \theta \end{cases}$$

- L'énergie cinétique du système :  $T = \frac{1}{2}mv_m^2$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m(\dot{x} + \dot{y})^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2(\cos \theta^2 + \sin \theta^2)$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$



- L'énergie potentielle du système :  $\mathbf{U = mgh}$  (h est la hauteur de m par rapport à un plan de référence donnée.)

**NB :** On a deux possibilités pour calculer la valeur du déplacement  $h$ , selon le choix de l'origine des énergies potentielles ( $U(0)=0$ ), ce choix doit avoir lieu lorsque la masse est dans sa position d'équilibre  $\theta = 0$ . L'énergie potentielle correspond à l'énergie potentielle de pesanteur.

**1<sup>er</sup> cas :** si on choisit comme origine des énergies potentielles l'axe (***Ox***) on a donc :  $h = -l \cos \theta$  (Le signe moins vient du fait que la masse  $m$  est inférieure à l'axe choisi).

Dans ce cas :  $U = -mgl \cos \theta$ .

**2<sup>ème</sup> cas :** si on choisit comme origine des énergies potentielles ( $U(0)=0$ ) l'axe ( $O'x'$ ).

À l'équilibre, on aura :  $h = l - l \cdot \cos \theta$ . Dans ce cas :

$$U = mgl(1 - \cos \theta)$$

Calcule du lagrangien :  $L \equiv T - U$

**1<sup>er</sup> cas :** On remplaçant T et U dans L on trouve :  $L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cdot \cos \theta$

L'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = -m.g.l.\sin \theta \\ (1) - (2): m.l^2 \ddot{\theta} + m.g.l.\sin \theta = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

Dans le cas des faibles oscillations, les angles sont très petits on a :  $\begin{cases} \sin \theta \approx \theta \\ \cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \approx 1 \end{cases}$

On aura donc  $m.l^2\ddot{\theta} + m.g.l.\theta = 0$ , En divisant par  $m.l^2$  on trouve :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

C'est l'équation de l'oscillateur harmonique de pulsation propre :  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

On trouve enfin :  $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ .

$$\underline{\text{2ème cas}} : L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m \cdot l^2 \ddot{\theta} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (1)$$

$$(1) - (2): m.l.^2 \ddot{\theta} + m.g.l.\sin\theta = 0$$

On aura donc  $m.l^2\ddot{\theta} + m.g.l.\theta = 0$ , On divisant par  $m.l^2$  on trouve :

$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$  Avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ , et on retrouve bien le même résultat.

### I.3.3 Solution de l'équation différentielle du mouvement

L'équation différentielle (EDF) du mouvement est de la forme :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

C'est une équation différentielle du second ordre sans second membre dont la solution sous la forme complexe est de la forme :  $x(t) = A e^{\alpha t}$

La dérivée première de la fonction  $x(t)$  (la vitesse) :  $\dot{x}(t) = A \alpha e^{\alpha t}$ .

La dérivée seconde de la fonction  $x(t)$  (l'accélération) :  $\ddot{x}(t) = A \alpha^2 e^{\alpha t}$

On remplace dans l'EDF :  $A \alpha^2 e^{\alpha t} + \omega_0^2 A e^{\alpha t} = 0 \Rightarrow A e^{\alpha t} (\alpha^2 + \omega_0^2) = 0$

$$\text{Or } A e^{\alpha t} \neq 0 \Rightarrow \alpha^2 + \omega_0^2 = 0 \text{ donc } \alpha = \pm j \omega_0$$

Donc la solution aura la forme:  $x(t) = A_1 e^{j\omega_0 t} + A_2 e^{-j\omega_0 t}$

Selon la relation d'**Euler** :  $e^{\pm j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t \pm j \sin \omega_0 t$

$$\rightarrow x(t) = A_1 (\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t) + A_2 (\cos \omega_0 t - j \sin \omega_0 t)$$

$$x(t) = (A_1 + A_2) \cos \omega_0 t + j(A_1 - A_2) \sin \omega_0 t = C \cos \omega_0 t + D \sin \omega_0 t$$

$$\text{Tel que : } C = (A_1 + A_2) \text{ et } D = j(A_1 - A_2)$$

Donc  $x(t) = C \cos \omega_0 t + D \sin \omega_0 t$  est aussi une solution de l'équation différentielle.

Si on pose :  $C = a \cdot \cos \theta$  et  $D = a \cdot \sin \theta$ , on aura :  $x(t) = a \cdot \cos \theta \cos \omega_0 t + a \cdot \sin \theta \sin \omega_0 t$

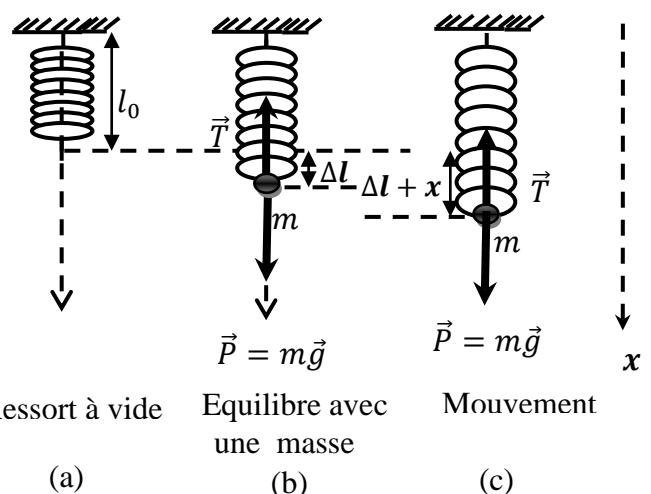
$\cos(x - y) \equiv \cos x \cos y + \sin x \sin y$  donc :  $x(t) = a \cos(\omega_0 t - \theta) = a \cos(\omega_0 t + \varphi)$ ,  $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$

$$\text{donc : } x(t) = a \cos(\omega_0 t + \varphi) \text{ Tel que : } a = \sqrt{C^2 + D^2} \text{ et } \theta = \arctan(\frac{D}{C})$$

### I.4 La force dans le mouvement harmonique

#### I.4.1 Exemple du pendule élastique vertical

C'est le cas d'une masse  $m$  accrochée à l'extrémité libre d'un ressort et se déplaçant sans frottement suivant une direction  $Ox$  vertical (voir figure).



**A l'équilibre :** il y a deux forces qui agissent sur la masse m ; son poids et la force de rappel du ressort tension due au ressort :

$$\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \Rightarrow mg - k\Delta l = 0$$

- $\vec{P}$  : Poids de la masse m.
- $\vec{T}$  : Force de rappel du ressort.

**En mouvement :** La deuxième loi de Newton (principe fondamental de la dynamique), nous permet d'écrire :

$$\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}$$

Pour un système à une dimension :

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x}$$

Après projection on obtient  $m\ddot{x} = mg - k(x + \Delta l)$ . En utilisant la condition d'équilibre précédente on obtient :

$$m\ddot{x} = -kx \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\text{Or : } \omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -kx = -m\omega_0^2 x; \text{ C'est la force de rappel due au ressort}$$

$$\text{avec } k = m\omega_0^2 = \text{cte}$$

Donc, la force dans les mouvements harmoniques simples est proportionnelle et opposée au déplacement et constitue une force de rappel.

#### I.4.2 L'étude d'une vibration harmonique en termes d'énergies

Nous voulons montrer que l'énergie totale (mécanique),  $E=T+U$ , est constante et déduire la valeur de cette constante. Pour cela prenons  $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ , alors :

$$E = T + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

Sachant que ( $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ ) et en utilisant la relation :  $k = m\omega_0^2$

$$\text{alors, } E = \underbrace{\frac{1}{2}mA^2\omega_0^2}_{T_{\max}} = \underbrace{\frac{1}{2}kA^2}_{U_{\max}} = \text{constante}$$

Nous retrouvons ici le fait que l'énergie mécanique de ce système ne varie pas. L'énergie totale est constante.

$$\text{On a: } T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2[1 - \cos^2(\omega_0 t + \varphi)].$$

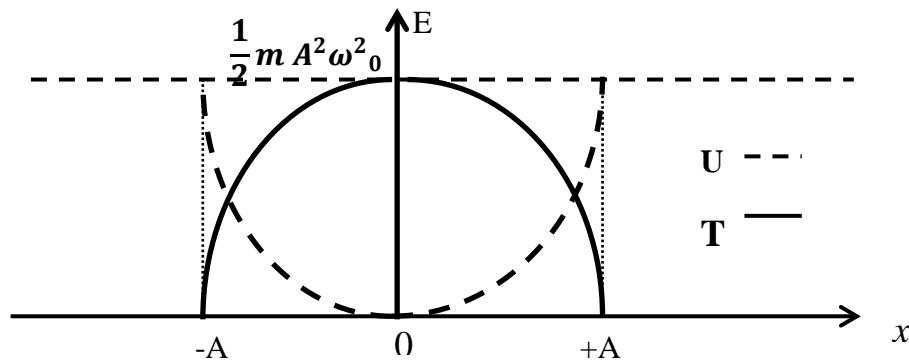
$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \left[1 - \frac{x^2}{A^2}\right] = \frac{1}{2}m\omega_0^2[A^2 - x^2].$$

$$\text{Si } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow T = T_{\max} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2. \\ x = \pm A \Rightarrow T_{\min} = 0 \end{cases}$$

$$\text{D'autre part : } U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2$$

Si  $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow U = U_{min} = 0 \text{ (position d'équilibre)} \\ x = \pm A \Rightarrow U = U_{max} = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \end{cases}$

La figure suivante montre la variation des énergies cinétique, potentielle et totale en fonction de x :



- ✓ L'énergie se transforme d'une énergie cinétique à une énergie potentielle.
- ✓ Quand l'énergie cinétique diminue l'énergie potentielle augmente et vice versa. Cette propriété est appelée **conservation de l'énergie** totale du système.

## I.5 Systèmes équivalents

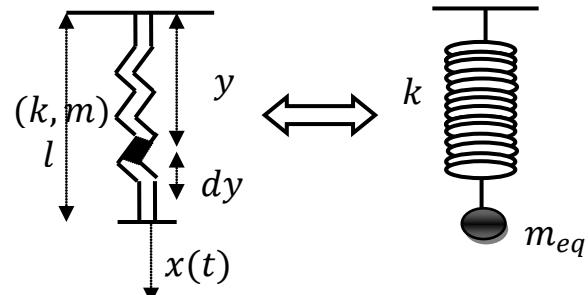
**Définition :** C'est un système simple qu'on représente en général par un ressort équivalent ou une masse équivalente.

### I.5.1 Masse équivalente : Cas d'un ressort de masse non négligeable.

$m$  : La masse du ressort.

#### Au repos :

- $l$  : La longueur du ressort.
- $dm$  : masse élémentaire située à une distance  $y$  du point de suspension.



#### En mouvement :

- $x(t)$  : Déplacement instantané de l'extrémité mobile du ressort.
  - $dy$  : Déplacement de la masse élémentaire  $= \frac{y}{l} x(t) \Rightarrow$  sa vitesse  $= \frac{y}{l} \dot{x}(t)$
  - La masse linéique du ressort à une distance  $l$ :  $\bar{\rho} = \frac{m}{l} \Rightarrow m = \bar{\rho} l$ .
  - La masse de l'élément  $dy$  du ressort :  $m_s = \bar{\rho} dy = \frac{m}{l} dy$
- $\Rightarrow$  L'énergie cinétique =  $\Sigma$  toutes les énergies de ses éléments;

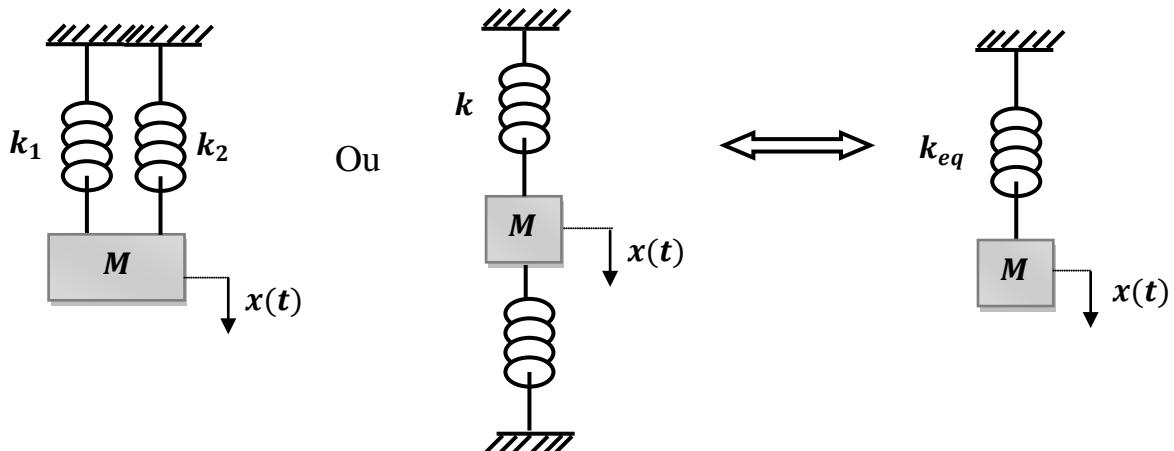
$$\Rightarrow T = \int_{(l)} \frac{1}{2} \left( \frac{m}{l} dy \right) \cdot \left( \frac{y}{l} \dot{x}(t)^2 \right)$$

$$T = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{m}{l^3} \dot{x}(t)^2 y^2 dy = \frac{1}{2} \frac{m}{l^3} \dot{x}(t)^2 \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^l$$

$$T = \frac{1}{2} \left( \frac{m}{3} \right) \dot{x}(t)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}(t)^2 \Rightarrow m_{eq} = \frac{m}{3}$$

**I.5.2 Ressorts équivalents :** On a 3cas :

**1<sup>er</sup> cas : Ressorts en parallèles (en oppositions) :**



L'élongation de chaque ressort est égale à  $x(t)$  donc :  $M \cdot g = (k_1 + k_2)x = k_{eq} \cdot x \Rightarrow k_{eq} = k_1 + k_2$

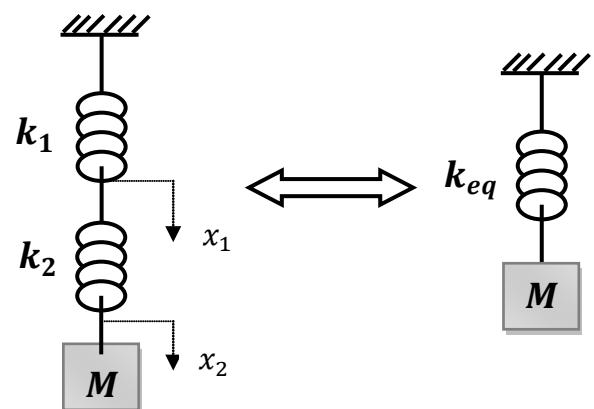
**2<sup>eme</sup> cas : Ressorts en séries :**

Soit  $x_1$  : l'élongation du ressort  $k_1$  tel que :  $M \cdot g = k_1 x_1$

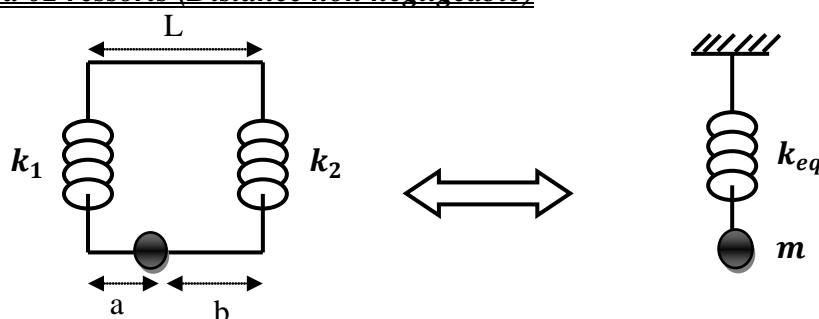
Soit  $x_2$  : l'élongation du ressort  $k_2$  tel que :  $M \cdot g = k_2 x_2$

$$\Rightarrow x = x_1 + x_2 = M \cdot g \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)$$

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \Rightarrow k_{eq} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$



**3<sup>eme</sup> cas : Barre liée à 02 ressorts (Distance non négligeable)**



$$k_{eq} = \frac{(a+b)^2}{\frac{a^2}{k_1} + \frac{b^2}{k_2}}$$

Si  $a=b$ , on aura :  $k_{eq} = k_1 + k_2$

## I.6 Analogie entre le système mécanique " Masse-ressort" et le système électrique "L-C".

Système mécanique	Système électrique
Déplacement : $x(t)$	Charge électrique $q(t)$
Vitesse : $\dot{x}(t)$	Courant électrique $i = \frac{dq}{dt}$
Accélération : $\ddot{x}$	Variation du courant : $\ddot{q}$
Masse : $m$	Inductance, bobine, self : $L$
Ressort $k$	Inverse de la capacité $1/C$
Force de rappel : $k x$	d.d.p entre les bornes d'un condensateur : $\frac{q}{C}$
Force d'inertie : $m \ddot{x}$	d.d.p entre les bornes de la bobine : $L \ddot{q}$
Energie potentielle : $\frac{1}{2} k x^2$	Energie électrique : $\frac{1}{2C} q^2$
Energie cinétique : $\frac{1}{2} m \dot{x}^2$	Energie magnétique : $\frac{1}{2} L \dot{q}^2$

### Points clefs

#### Oscillations libres non amorties

##### 1. Pendule élastique vertical( $m, k, x$ ):

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \text{ avec} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ (pulsation propre)} \\ T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \end{array} \right.$$

##### 2. Pendule pesant simple ( $m, l, \theta$ ):

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \text{ avec} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \text{ (pulsation propre)} \\ T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \end{array} \right.$$

- L'équation de Lagrange pour un mouvement unidimensionnel  $x : \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x} \right) = 0$ ;
- L'équation de Lagrange pour un mouvement rotationnel  $\theta : \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = 0$ ;
- L'énergie mécanique se conserve :  $T + U = \text{Constante}$ ;
- Masse équivalente (Cas où la masse  $m$  du ressort n'est pas négligeable) :  $\mathbf{m}_{eq} = \frac{m}{3}$ .
- Ressorts équivalents :

➤ 
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ressorts } k_1, k_2, \dots, k_n \text{ en parallèles: } k_{eq} = k_1 + k_2 + \dots + k_n \\ \text{Ressorts } k_1, k_2, \dots, k_n \text{ en série: } \frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}. \\ \text{Barre liée à 02 ressorts (Distance non négligeable): } k_{eq} = \frac{(a+b)^2}{\frac{a^2}{k_1} + \frac{b^2}{k_2}} \end{array} \right.$$

## CHAPITRE II

### Oscillations libres amorties : Systèmes à un degré de liberté

**Introduction :** Le pendule élastique comme le pendule pesant, se comporte comme un oscillateur harmonique à la condition de négliger tout frottement. Il oscille alors théoriquement sans jamais s'arrêter. En réalité, la masse se déplace dans un fluide (en général l'air) où il existe toujours des forces de frottement de type visqueux. L'oscillateur est alors amorti et fini par s'arrêter.

#### II.1 Oscillations libres amorties

La présence de frottements implique une dissipation d'énergie sous forme de chaleur ; on observe alors

- soit des oscillations dont l'amplitude diminue au cours du temps,
- soit un retour à l'équilibre sans oscillation.

On parle alors d'**amortissement**. L'expression de la force de frottement visqueux est la suivante :

$$\mathbf{F}_q = -\alpha \dot{\mathbf{q}}$$

Tel que :

$\alpha$  : est le coefficient de frottement visqueux.  $\alpha$  : [N.s/m].

$q$  : la cordonnée généralisée du système ;

$\dot{q}$  : La vitesse généralisée du système.

Le signe moins (-) vient du fait que cette force s'oppose au mouvement en agissant dans la direction et le sens contraire à la vitesse.

Dans un mouvement unidimensionnel  $x$  la force s'écrit sous la forme :

$$\vec{f} = -\alpha \vec{v} = -\alpha \dot{x} \vec{u}$$

#### II.2 Equation de Lagrange dans un système amorti

En tenant compte de la force de type frottement fluide (coefficient de frottement visqueux  $\alpha$ ), l'équation de Lagrange dans ce cas devient :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \mathbf{F}_q$$

Sous l'action des forces de frottements, le système dissipe (perde) de l'énergie mécanique sous forme de chaleur, il ya donc une relation entre la force  $\mathbf{F}_q$  et la fonction de dissipation  $D$  d'un côté et la fonction de dissipation et le coefficient de frottement visqueux  $\alpha$  :

$$\left[ \mathbf{F}_q = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} \quad \text{et } D = \frac{1}{2} \alpha \dot{q}^2 \right]$$

L'équation de Lagrange dans le cas d'un système amorti devient :  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}$

##### II.2.1 Equation différentielle : Système masse-ressort-amortisseur

Reprendons le cas du pendule élastique (vertical par exemple). L'étude de l'oscillateur amorti se fait de la même façon que précédemment mais en ajoutant la force de frottement visqueux.

A une dimension, l'équation de Lagrange s'écrit :  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}$

**L'énergie cinétique du système :** c'est l'énergie cinétique de la masse m :  $\mathbf{T} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

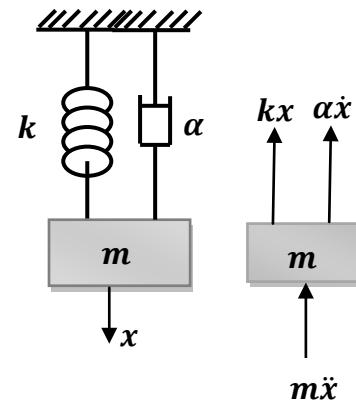
**L'énergie potentielle du système :** c'est l'énergie emmagasinée dans le ressort  $\mathbf{U} = \frac{1}{2} k x^2$

La fonction de dissipation :

$$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$$

La fonction de Lagrange :  $L = T - U \Rightarrow L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$ 

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha \dot{x} \end{cases}$$



En remplaçant dans l'équation de Lagrange on aura :

$$m \ddot{x} + kx = -\alpha \dot{x} \implies \ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

- ✓ C'est l'équation différentielle du mouvement dans le cas d'un système libre amorti.
- ✓ Par rapport aux oscillations libres non amorties, on reconnaît un nouveau terme  $(\frac{\alpha}{m} \dot{x})$  provenant de la dissipation d'énergie.
- ✓ La forme générale :  $\ddot{q} + \frac{\alpha}{m} \dot{q} + \frac{k}{m} q = 0$
- ✓ Souvent l'équation différentielle est écrite sous une forme dite réduite :  $\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega_0^2 q = 0$

Tels que :  $\begin{cases} \delta = \frac{\alpha}{2m} [1/S] : \text{Facteur d'amortissement.} \\ \xi = \frac{\delta}{\omega_0} (\text{Sans unité}) : \text{Rapport d'amortissement.} \end{cases}$

À une dimension la forme réduite s'écrit :  $\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ 

### II.2.2 La solution de l'équation différentielle : Système masse-ressort-amortisseur

L'équation différentielle du mouvement :  $\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ 

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre.

La fonction  $x(t) = De^{rt}$  est une solution particulière de cette équation différentielle à condition que  $r$  soit une des deux racines  $r_1$  et  $r_2$  de l'équation du second degré, appelée équation caractéristique.

$$r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 = 0$$

La solution générale de l'équation prend la forme :  $x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$ Tel que :  $\begin{cases} r_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \\ r_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \end{cases}$ ; On voit bien que la solution dépend des valeurs de  $\delta$  et  $\omega_0$ .1<sup>er</sup> cas :  $\delta < \omega_0$  ( $0 < \xi < 1$ ) : *système sous-amorti ou faiblement amorti*

$$\Rightarrow \delta^2 - \omega_0^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = -\delta + \sqrt{j^2(\omega_0^2 - \delta^2)} = -\delta + j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta + j\omega_a \\ r_2 = -\delta - \sqrt{j^2(\omega_0^2 - \delta^2)} = -\delta - j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta - j\omega_a \end{cases}$$

 $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$  : C'est la Pulsation des oscillations amorties

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{\omega_0^2}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

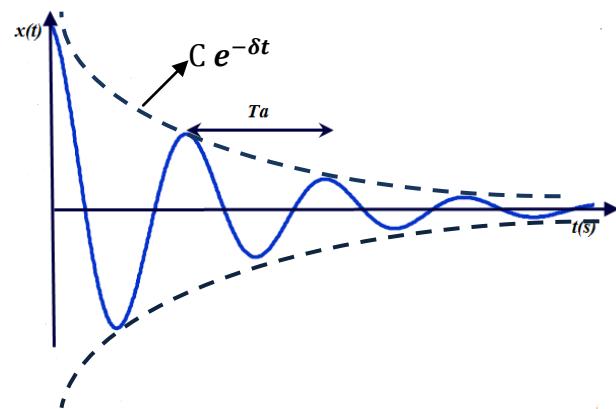
Donc :  $T_a = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \xi^2}}$ ;  $T_a$ : pseudo-période

La solution :

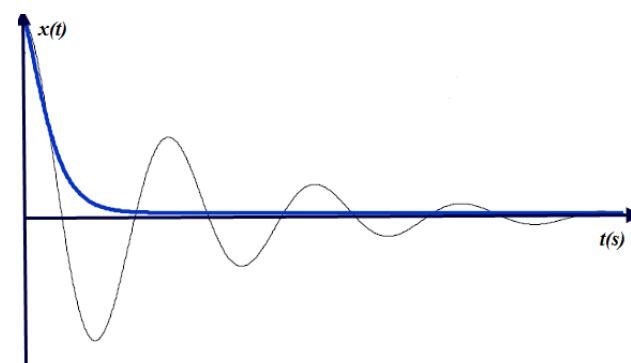
$$x(t) = C e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \varphi)$$

Remarques :

- $x(t)$  représente un mouvement vibratoire.
- L'amplitude  $C e^{-\delta t}$  est décroissante :  $x(t)$  tend vers  $\mathbf{0}$  quand  $t$  augmente.
- l'elongation  $x(t)$  va osciller en restant comprise entre  $-C e^{-\delta t}$  et  $C e^{-\delta t}$ . Ces deux exponentielles représentent l'enveloppe du mouvement de l'oscillateur c'est-à-dire les positions extrémales prises par  $x$  lorsque le temps s'écoule.

2 éme cas :  $\delta = \omega_0$  ( $\xi = 1$ ) : Amortissement critique :  $r_1 = r_2 = -\delta$ La solution :  $x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\delta t}$ 

Si  $\delta = \frac{\alpha}{2m}$  et  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \alpha = \alpha_c = 2\sqrt{km}$  : Valeur critique du coefficient de frottement.

Remarques :

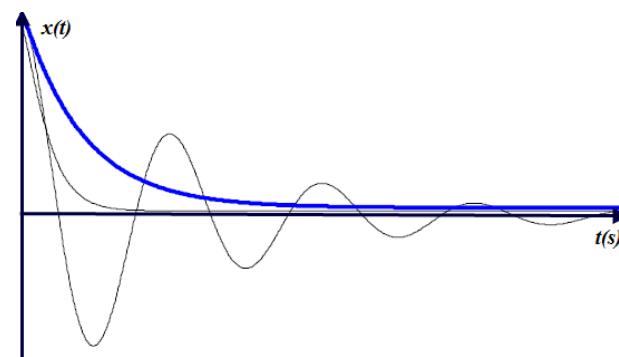
- $x(t)$  n'est pas oscillatoire car il ne contient pas un terme sinusoïdal.
- $x(t)$  tend vers  $\mathbf{0}$  sans oscillation quand le temps augmente.
- Le système revient à sa position d'équilibre le plus rapidement possible.

3 éme cas :  $\delta > \omega_0$  ( $\xi > 1$ ) : système *sur-amorti* ou *fortement amorti*

$$\Rightarrow \begin{cases} r_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \\ r_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$

La solution :

$$x(t) = e^{-\delta t} (C_1 e^{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t})$$

Remarques :

- $x(t)$  tend vers  $\mathbf{0}$  sans oscillation quand le temps augmente.
- $x(t)$  est un mouvement non sinusoïdal

## II.3 L'oscillateur harmonique électrique

Nous allons voir maintenant qu'il existe un autre type d'oscillateur harmonique amorti dans un autre domaine de la physique : l'électricité.

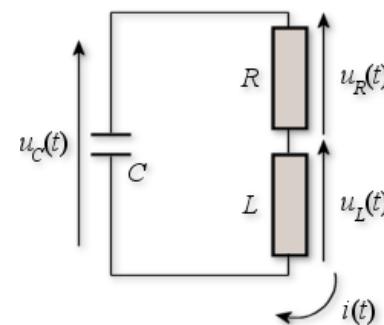
Soit un circuit électrique, constitué des 3 éléments de base mis en série :

- un résistor de résistance  $R$  ;
- un condensateur de capacité  $C$  ;
- et une bobine d'inductance  $L$ .

Selon la loi de Kirchoff :

$$\begin{aligned} u_R + u_C + u_L &= 0 \Rightarrow Ri(t) + \frac{1}{c} q + L \frac{di}{dt} = 0 \\ R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{c} q + L \frac{d^2q}{dt^2} &= 0 \Rightarrow R\ddot{q} + \frac{1}{c} q + L\ddot{q} = 0 \\ \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{Lc} q &= 0 \Rightarrow \ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \end{aligned}$$

avec  $\begin{cases} \delta = \frac{R}{2L} \\ \omega_0^2 = \frac{1}{Lc} \end{cases}$  Donc :  $\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \Rightarrow \begin{cases} \delta = \frac{R}{2L} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{Lc}} \end{cases}$



**Remarque :**

- Pour un amortissement critique  $\delta = \omega_0 \Rightarrow \frac{R}{2L} = \sqrt{\frac{1}{Lc}}$  Donc :  $R = R_c = 2\sqrt{\frac{L}{c}}$

## II.4 Décrément logarithmique

**Définition :** C'est le logarithme du rapport de 2 amplitudes successives des oscillations amorties.

$$D = \ln \frac{x(t_1)}{x(t_2)} ; \quad t_2 = t_1 + T_a$$

Où  $x(t_1)$  et  $x(t_1 + T_a)$  représentent les amplitudes des oscillations aux instants  $t_1$  et  $(t_1 + T_a)$ : généralement ces deux instants sont choisis comme correspondant à deux extrema successifs de même signe. Cette quantité mesure la décroissance des amplitudes pendant une période.

$$D = \ln \frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \ln \frac{x(t_1)}{x(t_1 + T_a)}$$

Pour un système amorti :

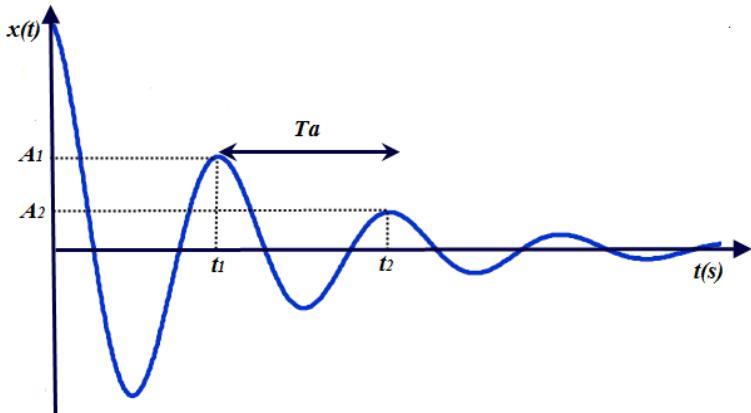
$$x(t) = C e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \varphi)$$

$$\Rightarrow D = \ln \frac{C e^{-\delta t_1} \sin(\omega_a t_1 + \varphi)}{C e^{-\delta(t_1+T_a)} \sin(\omega_a(t_1+T_a) + \varphi)}$$

$$D = \ln(e^{\delta T_a}) = \delta T_a$$

$$\delta T_a = \delta \frac{T_0}{\sqrt{1-\xi^2}} = \xi \omega_0 \frac{T_0}{\sqrt{1-\xi^2}} = 2\pi \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} ; \text{ donc :}$$

$$D = \ln \frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \delta T_a = 2\pi \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$



**Remarques :**

- Pour plusieurs périodes :  $T = nT_a$ ;  $t_2 = t_1 + nT_a$

$$\Rightarrow D = \ln \frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \ln \frac{x(t_1)}{x(t_1 + nT_a)} = n\delta T_a = 2\pi \frac{n\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

- La pseudo-période et le décrément logarithmique n'ont de sens que si le régime est pseudopériodique.

## II.5 Facteur de qualité (Facteur de surtension)

Pour décrire l'amortissement d'un système oscillant mécanique ou électrique on emploie le **facteur de qualité  $Q$**  défini par l'expression suivante :

$$Q = 2\pi \frac{E_{max}}{|\Delta E|}$$

- $E_{max}$  : est l'énergie maximale stockée dans le système.
- $|\Delta E|$  : est l'énergie perdue par cycle.
- la notion de ‘qualité’ pour caractériser l'oscillateur, comme la grandeur qui traduit l'aptitude du système considéré à garder son énergie tout en oscillant. La qualité est d'autant meilleure que le rapport  $\frac{E_{max}}{|\Delta E|}$  est grand.

### II.5.1 Calcule du facteur de qualité : système masse-ressort-amortisseur ( $m, k, \alpha$ )

Prenons l'exemple d'un système masse-ressort-amortisseur ( $m, k, \alpha$ ) faiblement amorti dont la solution de l'équation différentielle est sous la forme :

$$x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi), x_0 = C e^{-\delta t} \text{ et } \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \approx \omega_0$$

On a d'une part :

$$E_{max} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2 \quad (\text{Cf.chapitre I}).$$

D'autre part:  $\Delta E = \int_t^{t+T_a} F(t) dx$

Tel que :  $F(t)$ : est la force de frottement visqueux :  $F(t) = -\alpha \dot{x}(t)$

$$\Rightarrow \Delta E = \int_t^{t+T_a} -\alpha \dot{x}(t) dx = \int_t^{t+T_a} -\alpha \dot{x}(t)[\dot{x} dt] = -\alpha \int_t^{t+T_a} \dot{x}^2 dt$$

On a :  $x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow \dot{x}(t) = x_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta E &= -\alpha x_0^2 \omega_0^2 \int_t^{t+T_a} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) dt \\ &= \int_t^{t+T_a} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) dt = \int_t^{t+T_a} \frac{1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)}{2} dt \Rightarrow \Delta E = -\frac{1}{2} \alpha T_a \omega_0^2 x_0^2 \\ &\quad T_a = \frac{2\pi}{\omega_a}; \omega_a \approx \omega_0 \rightarrow \Delta E = -\alpha \pi \omega_0 x_0^2 \end{aligned}$$

- On retrouve bien une variation négative de l'énergie c'est-à-dire une perte d'énergie au cours du temps.
- L'énergie perdue se transforme en énergie thermique ou elle se disperse en se diffusant dans le milieu avoisinant.

En remplaçant dans l'expression de  $Q$ , on trouve :

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2}{\pi \alpha x_0^2 \omega_0} = \frac{m \omega_0}{\alpha} \Rightarrow Q = \frac{m \omega_0}{\alpha} = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1}{2\xi}$$

### II.5.2 Calcul du facteur de qualité : système électrique (RLC)

Dans un système mécanique ( $m, k$ ):  $E_{max} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2$  (cf. Chapitre I)

Dans un système électrique (RLC):  $E_{max} = \frac{1}{2} L \omega_0^2 q_0^2$

Dans un système mécanique ( $m, k, \alpha$ ):  $\Delta E = -\pi \alpha x_0^2 \omega_0 \Rightarrow$  Dans un système électrique (RLC):

$$\Delta E = -\pi R q_0^2 \omega_0$$

Donc :

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2}L\omega_0^2 q_0^2}{\pi R q_0^2 \omega_0} = \frac{L\omega_0}{R}, \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \Rightarrow Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\xi}$$

### Remarque :

- Plus l'amortissement est faible, plus la qualité du système oscillant est grande. Or  $Q$  est d'autant plus grand pour un  $\omega_0$  donné, que l'amortissement est faible. Un système très amorti a un  $Q$  faible.

### Points clefs

#### Oscillations libres amorties

- ❖ L'équation de Lagrange pour un mouvement unidimensionnel  $x$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} ; \quad D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$$

- ❖ L'équation du mouvement :  $\ddot{x} + 2\delta x + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \delta = \frac{\alpha}{2m} \\ \xi = \frac{\delta}{\omega_0} \end{cases}$

- ❖  $x(t) = A e^{rt}$  est une solution particulière tel que :  $\begin{cases} r_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \\ r_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \end{cases}$

Amortissement faible:  $\delta < \omega_0$  ( $0 < \xi < 1$ )  $\Rightarrow \delta^2 - \omega_0^2 < 0$

- La solution :  $x(t) = C e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \varphi)$

avec  $\begin{cases} \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} : \text{Pulsation des oscillations amorties.} \\ T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} : \text{pseudo-période.} \end{cases}$

Amortissement critique:  $\delta = \omega_0$  ( $\xi = 1$ )

- La solution :  $x(t) = (C_1 + C_2) e^{-\delta t}$  avec  $\alpha = \alpha_c = 2\sqrt{km}$

Amortissement fort:  $\delta > \omega_0$  ( $\xi > 1$ )

- La solution :  $x(t) = e^{-\delta t} (D_1 e^{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} + D_2 e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t})$

- ❖ Le Décrément logarithmique :  $D = \delta T_a$

- ❖ Facteur de qualité :  $Q = 2 \pi \cdot \frac{l' \text{énergie stockée}}{l' \text{énergie perdue par cycle}} = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{2\xi}$

## CHAPITRE III

### Oscillations forcées amorties : Systèmes à un degré de liberté

**Introduction :** On a vu que l'amortissement des oscillations était dû à une diminution de l'énergie mécanique sous forme de chaleur dissipée. Pour **compenser** ces pertes d'énergies et **entretenir** (conserver) les oscillations, il faut une source d'énergie à travers une force extérieure. On va donc rajouter une force extérieure souvent dite **excitatrice**.

Il va donc y avoir une force supplémentaire qu'il vaut mieux qu'elle soit colinéaire au mouvement et qu'elle soit le plus possible dans le sens du mouvement.

Dans ce chapitre, on étudie la réponse d'un système amorti à 1 ddl à une excitation harmonique sinusoïdale produite par une force extérieure au système. Ce type d'excitation se rencontre fréquemment dans l'industrie (machines tournantes, ventilateurs, moteurs, pompes ...).

#### III.1 Equation différentielle du mouvement

a) Pour un mouvement de translation, on écrit :  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + F_{ext}$

b) Pour un mouvement de rotation avec un angle  $\theta$ , on écrit  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + M(F_{ext})$

$$\text{Tel que : } M(F_{ext}) = F_{ext} \cdot L = \frac{\partial r}{\partial \theta} |F_{ext}|$$

$M(F_{ext})$  : Est le moment de la force appliquée [N.m].

Le moment : caractérise la capacité d'une force à faire tourner un objet autour d'un point.

L : Le bras du levier : est la distance droite d'action de la force.

r : La distance parcourue par la masse dans la direction de l'action de la force.

##### III.1.1 Exemple : système masse-ressort-amortisseur

Reprendons le cas du pendule élastique (vertical par exemple).

L'étude de l'oscillateur amorti se fait de la même façon que précédemment mais en ajoutant une force extérieure ( $F_{ext}$ ).

A une dimension, l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + F_{ext}$$

Prenons une force sinusoïdale appliquée à la masse m :  $F_{ext} = F_0 \sin \omega t$ .

L'énergie cinétique du système : c'est l'énergie cinétique de la masse m :  $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

L'énergie potentielle du système : c'est l'énergie emmagasinée dans le ressort :  $U = \frac{1}{2} kx^2$

La fonction de dissipation :  $D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$

La fonction de Lagrange :  $L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha \dot{x} \end{cases}$$

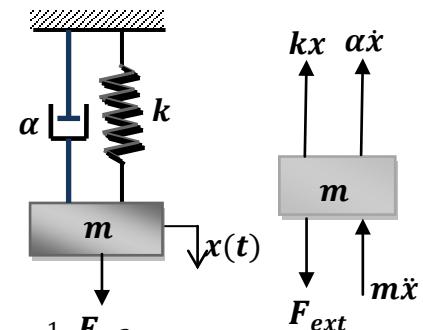
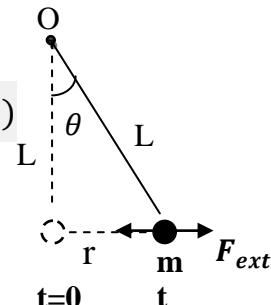
En remplaçant dans l'équation de Lagrange on aura :  $m \ddot{x} + kx = -\alpha \dot{x} + F_0 \sin \omega t$

On divise alors par m et on trouve :  $\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$

Souvent l'équation différentielle est écrite sous la forme réduite :  $\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$

Tels que :  $\delta = \frac{\alpha}{2m} [1/S]$  : **Facteur d'amortissement**.

Tels que :  $\xi = \frac{\delta}{\omega_0}$  (Sans unité) : **Rapport d'amortissement**.



Nous obtenons donc une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre.

### III.2 Solution de l'équation différentielle du mouvement

La solution générale de cette équation différentielle est la somme de deux termes :

- Une solution de l'équation **sans** second membre : solution homogène  $x_H(t)$ ,
- Une solution de l'équation **avec** second membre : solution particulière  $x_P(t)$ .

La solution totale de l'équation du mouvement sera donc :  $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$

#### III.2.1 Solution homogène :

La solution homogène correspond à la solution de l'équation différentielle sans second membre :

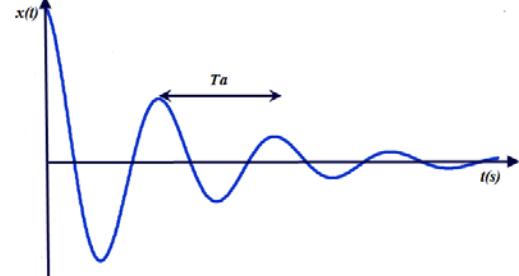
$$\ddot{x} + 2\delta x + \omega_0^2 x = 0$$

Il apparaît que la solution de l'équation différentielle homogène est tout simplement la solution trouvée pour l'oscillateur harmonique amorti en régime libre dans le cas des oscillations faiblement amorties :

$$x_H(t) = C e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \phi) \text{ avec } \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

#### Remarque :

- La solution générale de l'équation sans second membre correspond à un régime **transitoire** (qui ne dure qu'un certain temps).



#### III.2.2 Solution particulière:

Lorsque la composante  $x_H(t)$  devient vraiment négligeable, il ne reste plus que la solution particulière, qui est la solution imposée par la fonction d'excitation. Nous disons que nous sommes en régime forcé ou régime permanent.

La force excitatrice oblige le système mécanique à suivre une évolution temporelle équivalente à la sienne. Donc si  $F_{ext}$  est une fonction sinusoïdale de pulsation  $\omega$ ; alors la solution particulière  $x_P(t)$  sera une fonction sinusoïdale de même pulsation  $\omega$ .

Les oscillations de la masse ne sont pas forcément en phase avec la force excitatrice et présente un déphasage noté  $\varphi$ . La solution particulière correspondant au régime permanent s'écrit donc :

$$x_P(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Pour des raisons pratiques, il est commode d'utiliser la notation complexe. La grandeur complexe associée à  $x(t)$  s'écrit :

$$\dot{z}_P(t) = A e^{j(\omega t + \varphi)} \text{ et } F_{ext} = F_0 e^{j\omega t}$$

Déterminer les grandeurs  $A$  et  $\varphi$  revient à chercher le module de l'amplitude complexe.

#### III.2.2.1 Calcul de l'amplitude A

$\dot{z}_P(t)$  Vérifie l'équation différentielle avec second membre :  $\ddot{\dot{z}}_P + 2\delta \dot{z}_P + \omega_0^2 z_P = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t} = B e^{j\omega t} (*)$

Calculons la dérivée première puis le dérivé second :

$$z_P(t) = A e^{j(\omega t + \varphi)} \Rightarrow \begin{cases} \dot{z}_P(t) = A j\omega e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega z_P(t) \\ \ddot{z}_P(t) = A j^2 \omega^2 e^{j(\omega t + \varphi)} = -\omega^2 z_P(t) \end{cases}$$

On remplace dans (\*) et on trouve :  $-\omega^2 \ddot{z}_P(t) + 2\delta\omega \dot{z}_P(t) + \omega_0^2 z_P(t) = B e^{j\omega t}$

$$\Rightarrow [(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\delta\omega j] \ddot{z}_P(t) = [(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\delta\omega j] A e^{j(\omega t + \varphi)} = B e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow [(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\delta\omega j] A e^{j\varphi} = B$$

On divise sur " $e^{j\varphi}$ " et on trouve:  $[(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\delta\omega j] A = B e^{-j\varphi} \dots \dots \dots (1)$

Le conjugué de cette équation est la suivante :  $[(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\delta\omega j] A = B e^{j\varphi} \dots \dots \dots (2)$

$$(1) \times (2) \Rightarrow A^2 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2] = B^2 \Rightarrow A = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}} = \text{cte}$$

### III.2.2.2 Calcul de $\varphi$

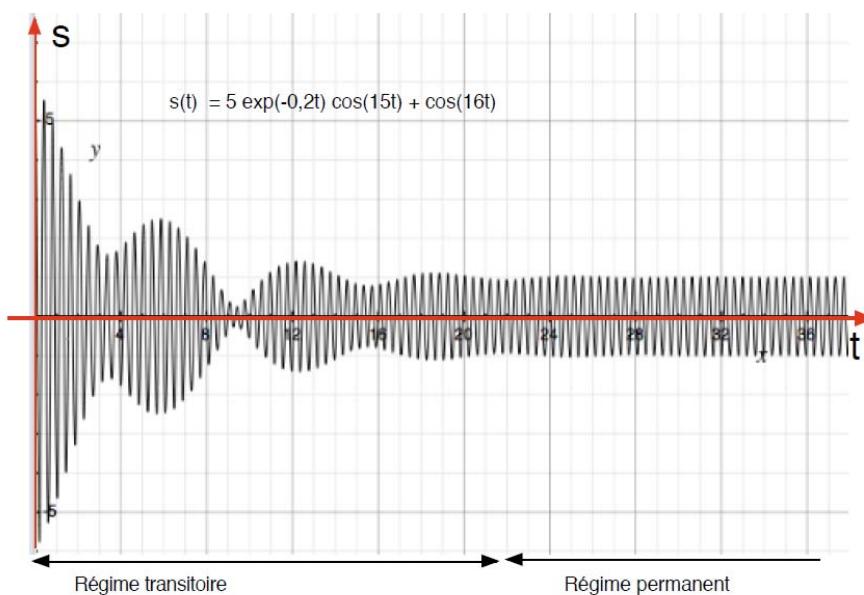
$$[(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\delta\omega j] A = \begin{cases} B e^{-j\varphi} \\ B (\cos\varphi - j \sin\varphi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(\omega_0^2 - \omega^2) = B \cos\varphi \\ 2\delta\omega A = -B \sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \tan\varphi = \frac{-2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$\Rightarrow \varphi = \operatorname{Arctg} \left( \frac{-2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right)$$

Donc :  $x_P(t) = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}} \sin \left[ \omega t + \operatorname{Arctg} \frac{-2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right]$

#### Remarques:

- La solution générale de l'équation différentielle s'écrit :  $x(t) = x_H(t) + x_p(t)$ .
- $x_H(t)$  est appelée solution homogène caractérisant un régime transitoire qui disparaît exponentiellement avec le temps. Quand le régime transitoire disparaît :  $x(t) \approx x_p(t)$
- $x_p(t)$  est appelée solution particulière d'amplitude  $A = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$  caractérisant un régime permanent (stationnaire) car il subsiste aussi longtemps que la force extérieure ( $F_{ext}$ ) est appliquée. Nous notons la dépendance de l'amplitude  $A$  de la pulsation  $\omega$ .
- La solution  $x(t)$  aura donc souvent une allure caractéristique comme celle présentée sur la figure ci-dessous :



### III.3 Etude du régime permanent : phénomène de résonance en amplitude

#### III.3 .1 La variation de l'amplitude en fonction de la pulsation de la force pour différentes valeurs de $\xi$ :

Soit  $A(\omega)$  l'amplitude de la solution particulière caractérisant le régime permanent (forcé) :

$$A(\omega) = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$

$$A(\omega) = \frac{B}{\omega_0^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + (2\delta)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{B/\omega_0^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\delta}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{A_0}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + (2\xi)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Tels que :  $A_0 = \frac{B}{\omega_0^2}$  et  $\xi = \frac{\delta}{\omega_0}$  avec  $B = \frac{F_0}{m} \Rightarrow A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$  Donc :  $A_0 = \frac{F_0}{k}$

$$A(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + (2\xi)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Posons  $r = \frac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow A(r) = \frac{A_0}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$  et cherchons la valeur maximale de  $A(r)$ .

$A(\omega)$  est maximale quand le dénominateur est minimal.

Posons  $r = \frac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow A(r) = (1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2$  et cherchons la valeur maximale de  $A(r)$ .

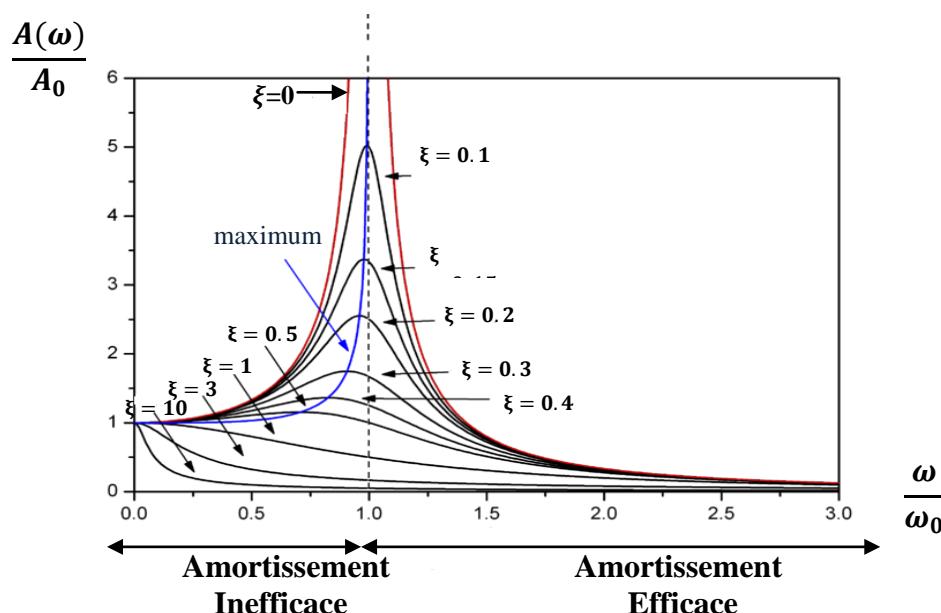
$$\begin{aligned} A(r)_{max} &\Leftrightarrow \frac{dA(r)}{dr} = 0 \Rightarrow [2(1-r^2)(-2r) + 8\xi^2 r] = 0 \\ \frac{dA(r)}{dr} = 0 &\Rightarrow -4r[1 - r^2 - 2\xi^2] = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = \sqrt{1 - 2\xi^2} \end{cases} \end{aligned}$$

On a un minimum ou un maximum selon le signe du deuxième dérivée :

$$\frac{d^2A(r)}{dr^2} = 12r^2 + 8\xi^2 - 4, \text{ donc : } \begin{cases} r = 0 \Rightarrow \frac{d^2A(r)}{dr^2} = 8\xi^2 - 4 < 0 ; \text{ car } 0 < \xi < 1 \\ r = \sqrt{1 - 2\xi^2} \Rightarrow \frac{d^2A(r)}{dr^2} = 8 - 16\xi^2 > 0 ; \text{ car } 0 < \xi < 1 \\ \frac{\omega}{\omega_0} = 0 \dots \dots \text{solution refusée} \\ \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 - 2\xi^2} \end{cases}$$

Donc :  $\frac{A(\omega)}{A_0}$  est maximale pour  $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^* = \sqrt{1 - 2\xi^2} < 1 \Rightarrow \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$

La variation de l'amplitude en fonction de la pulsation de la force pour différentes valeurs de  $\xi$  est représentée sur la figure suivante :



**Remarques :**

- L'amplitude  $A$  augmente quand le rapport d'amortissement  $\xi$  diminue.
- L'amplitude de vibration atteint un maximum quand  $\omega \cong \omega_0$  : on dit qu'il ya **résonance** : la valeur maximale  $(\frac{\omega}{\omega_0})^*$  (correspondant à la valeur maximale de l'amplitude) n'est pas égale à 1 mais égale à  $\sqrt{1 - 2\xi^2} < 1$ .

**Discussions:**

- Au début d'un mouvement résonnant, lorsque la force est appliquée au système, la majeure partie de l'énergie, fournie lors de chaque cycle, est emmagasinée dans le système; une faible partie se dissipe en frottement. L'énergie ainsi emmagasinée par le système fait augmenter progressivement l'amplitude de ses oscillations jusqu'à une valeur maximum. Cette valeur subsiste tant que subsiste l'apport d'énergie par la force extérieure.
- Plus l'amortissement est faible, plus cette courbe est aiguë et plus le maximum est grand : en l'absence d'un amortissement suffisant rien ne viendrait limiter les amplitudes des oscillations à s'amplifier, risque de destruction du système : le système entre en résonance. Les conséquences peuvent être graves. On peut citer deux cas connus :
  - Le 18 avril 1850 à Angers, un régiment traversant au pas cadencé (harmonieux) un pont suspendu enjambant le Maine provoqua sa destruction.
  - Le 7 novembre 1940, six mois après son inauguration, le pont suspendu de Tacoma (Etats-Unis) était détruit par les effets des rafales de vent qui sans être particulièrement violentes ( $60 \text{ km.h}^{-1}$ ) étaient régulières.

**III.3 .2 La variation de la phase en fonction de la pulsation de la force pour différentes valeurs de  $\xi$  :**

Soit  $\varphi$  la phase initiale de la solution particulière caractérisant le régime permanent (forcé) tel que :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-2\delta\omega}{(\omega^2_0 - \omega^2)}$$

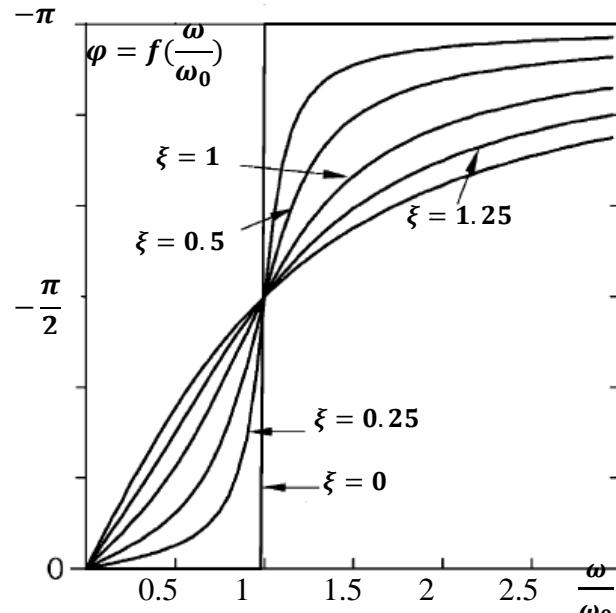
- Nous remarquons que  $\operatorname{tg} \varphi$  est négatif. Cela paraît normal qu'il y ait un retard de l'oscillateur par rapport à la force qui entretient le mouvement. L'oscillateur harmonique essaie de suivre le mouvement en étant ralenti par les frottements, donc il doit obligatoirement prendre du retard par rapport à l'oscillation excitatrice donc avoir un déphasage négatif. Ce déphasage est dépendant de la pulsation de la force  $\omega$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{-2\delta\omega}{(\omega^2_0 - \omega^2)} = \frac{-2\delta\omega}{\omega^2_0(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2)} = -\pi \\ &\frac{\frac{-2\delta\omega}{\omega^2_0}}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2} = \frac{-2(\frac{\delta}{\omega_0})(\frac{\omega}{\omega_0})}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2} \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{-2\xi(\frac{\omega}{\omega_0})}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2} \end{aligned}$$

- Si  $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$  ( $\omega = \omega_0$ )  $\Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = -\infty \Leftrightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}; \forall \xi$ .
- Si  $\xi = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0 \text{ ou } \varphi = -\pi$

**Remarques :**

- L'oscillateur est en résonance de phase quand  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  pour  $\omega = \omega_0$ .
- L'oscillateur est toujours en retard de phase par rapport à la force et ce retard augmente lorsque la pulsation augmente.



- L'oscillateur et la force sont en phase pour  $\omega = 0$

### Conclusions :

Selon la valeur de  $\xi$  on a 3 cas possibles :

$$\text{1er cas : Faibles fréquences : } \xi \ll 1 \text{ (} \omega \ll \omega_0 \text{)} \rightarrow \begin{cases} A \approx A_0 = \frac{F_0}{k} \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

$$\text{2ème cas : Hautes fréquences : } \xi \gg 1 \text{ (} \omega \gg \omega_0 \text{)} \rightarrow \begin{cases} A \approx 0 \\ \varphi = -\pi \end{cases}$$

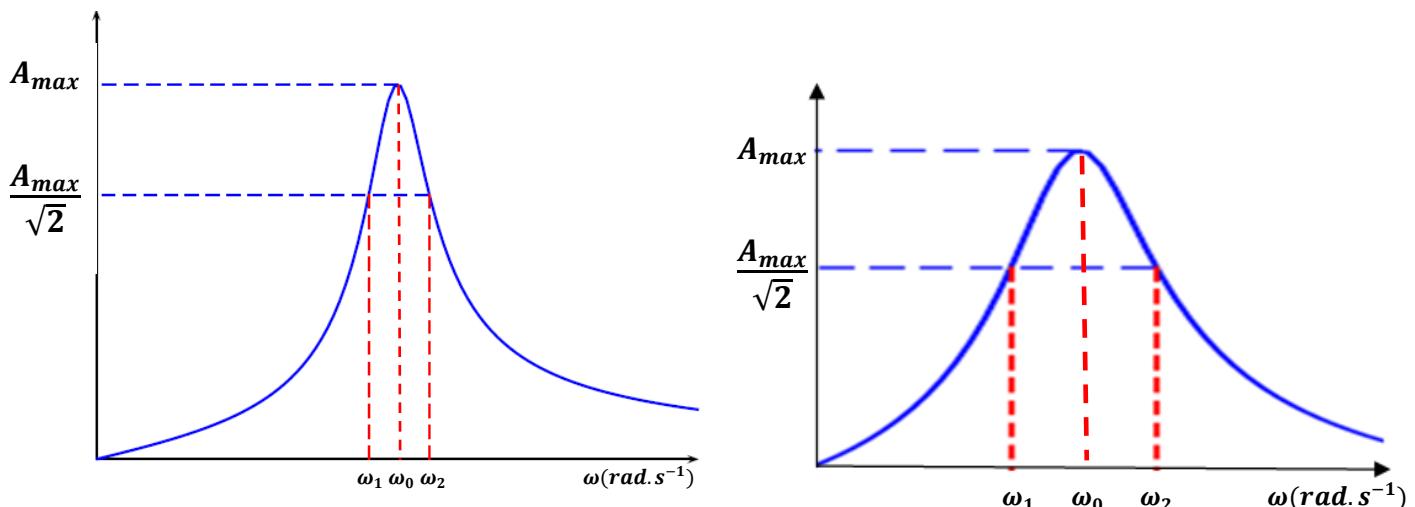
$$\text{3ème cas : La résonance : } \xi = 1 \text{ (} \omega \approx \omega_0 \approx \omega_r \text{)} \rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^* = \sqrt{1 - 2\xi^2}, \frac{A_{max}}{A_0} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}, \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

### Remarques:

- Si  $\xi = 0$  (système non amorti) : l'amplitude tend vers l'infini or en réalité, les systèmes sont tous amortis donc l'amplitude n'est jamais infini.
- Si  $\xi \ll 1$  (système faiblement amorti) :  $\frac{A_{max}}{A_0} \approx \frac{1}{2\xi}$ ; ( $\omega \approx \omega_0 \approx \omega_r$ )

### III.3 .3 Phénomène de résonance et Facteur de qualité

- Dans les systèmes électriques, ce phénomène permet de calculer le facteur de qualité  $Q$  qui augmente lorsque l'amplitude maximale augmente  $Q = \frac{A_{max}}{A_0} \approx \frac{1}{2\xi}$ .
- Une autre méthode pratique pour déterminer le facteur de qualité :  $Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$
- Pour caractériser l'acuité (intensité) de la réponse d'un oscillateur en fonction de la pulsation, on définit une **bande passante** :  $\omega_2 - \omega_1$



### Conclusions :

- Quand  $\xi$  augmente  $\Rightarrow Q$  diminue  $\Rightarrow \omega_2 - \omega_1$  augmente  $\Rightarrow$  la courbe de résonance est plus large  $\Rightarrow$  diminution de l'amplitude de résonance donc de la qualité aussi.
- Les extrémités de la bande passante correspondent à une amplitude de vitesse  $\sqrt{2}$  fois plus petite qu'à la résonance.

 **Points clefs**  
Oscillations forcées amorties

**1. Un mouvement unidimensionnel  $x$  :**

- ❖ L'équation de Lagrange :  

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + F_{ext}; \quad D = \frac{1}{2}\alpha \dot{x}^2, \quad F_{ext} = F_0 \sin \omega t$$
- ❖ l'équation différentielle sous la forme réduite :  $\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$
- ❖ Solution de l'équation différentielle du mouvement:  $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$
- ❖ La solution homogène:  $x_H(t) = C e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \phi)$  avec  $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$
- ❖ La solution particulière :  $x_P(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}} \sin(\omega t + \text{Arctg}(\frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}))$
- ❖ La variation de l'amplitude en fonction de la pulsation de la force :

$$\frac{A(\omega)}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + (2\xi)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \Rightarrow \left\{ \frac{A(\omega)}{A_0} \text{ est maximale pour } \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^* = \sqrt{1 - 2\xi^2} \right.$$

$$tg\varphi = \frac{-2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\omega}{\omega_0} = 1 \Rightarrow tg\varphi = -\infty \Leftrightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}; \forall \xi \\ \xi = 0 \Rightarrow tg\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0 \text{ ou } \varphi = -\pi \end{cases}$$

- *Faibles fréquences* :  $\xi \ll 1$  ( $\omega \ll \omega_0$ )  $\rightarrow \begin{cases} A \approx A_0 = \frac{F_0}{k} \\ \varphi = 0 \end{cases}$
- *Hautes fréquences* :  $\xi \gg 1$  ( $\omega \gg \omega_0$ )  $\rightarrow \begin{cases} A \approx 0 \\ \varphi = -\pi \end{cases}$
- *La résonance* :  $\xi = 1$  ( $\omega \approx \omega_0 \approx \omega_r$ )  $\rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^* = \sqrt{1 - 2\xi^2}, \quad \frac{A_{max}}{A_0} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}, \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$
- ❖ Le facteur de qualité :  $Q = \frac{A_{max}}{A_0} \approx \frac{1}{2\xi} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$

**2. Un mouvement rotationnel  $\theta$  :**

- ❖ L'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial r}{\partial \theta} \cdot |F_{ext}|; \quad r : \text{est la direction d'action de la force } F_{ext}$$

## CHAPITRE IV

### Oscillations libres des systèmes à plusieurs degrés de liberté

**Introduction :** Dans ce chapitre, nous examinons les systèmes qui se composent de deux ou plusieurs oscillateurs qui sont couplés dans une certaine façon et qui ont plus d'une pulsation d'oscillation. Nous allons voir que ce couplage produit de nouveaux et d'importants effets physiques. Chacune des pulsations correspondent à une manière différente dans laquelle le système peut osciller. Ces différentes façons sont appelées « modes normaux ». Les modes normaux d'un système sont caractérisés par le fait que toutes les parties du système oscillent avec la même pulsation. Les oscillateurs sont couplés parce qu'ils se trouvent rarement dans un isolement complet et sont généralement capables d'osciller avec de différentes façons. Les oscillateurs couplés sont également importants car ils ouvrent la voie à la compréhension des ondes dans les milieux continus. Le mouvement des ondes dépend des systèmes voisins qui vibrent et qui sont couplées entre elles et peuvent donc transmettre de l'énergie entre elles.

#### Définition :

Un système est à plusieurs degrés de liberté (ddl) si plusieurs coordonnées indépendantes sont nécessaires pour décrire son mouvement. Il y a autant d'équations de Lagrange que de degrés de liberté ou de coordonnées généralisées.

#### IV.1 Systèmes à 2 degrés de liberté

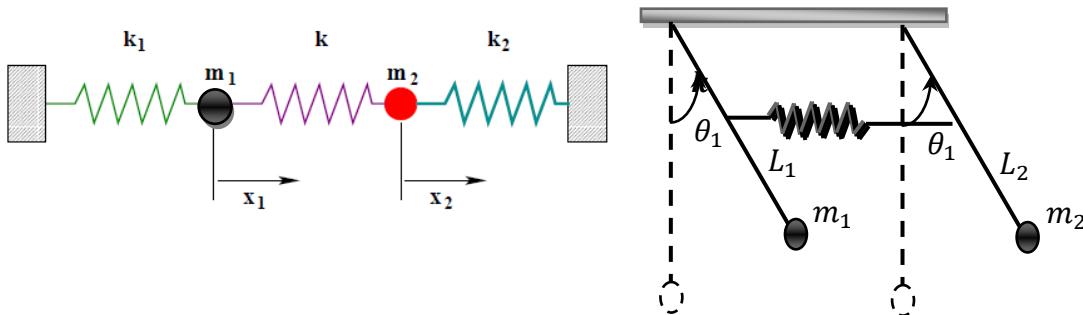
Pour l'étude des systèmes à deux degrés de liberté, il est nécessaire d'écrire deux équations différentielles du mouvement que l'on peut obtenir à partir des équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_1} \right) = 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_2} \right) = 0 \end{cases}$$

Un système à 2 degrés de liberté possède 02 coordonnées généralisées, 02 équations différentielles et 02 pulsations propres ( $\omega_1, \omega_2$ ).

##### IV.1 .1 Les types de couplages

- a) **Couplage Elastique :** Le couplage dans les systèmes mécaniques est assuré par élasticité. Dans les systèmes électriques, on trouve les circuits couplés par capacité, ce qui est équivalent au couplage par élasticité.

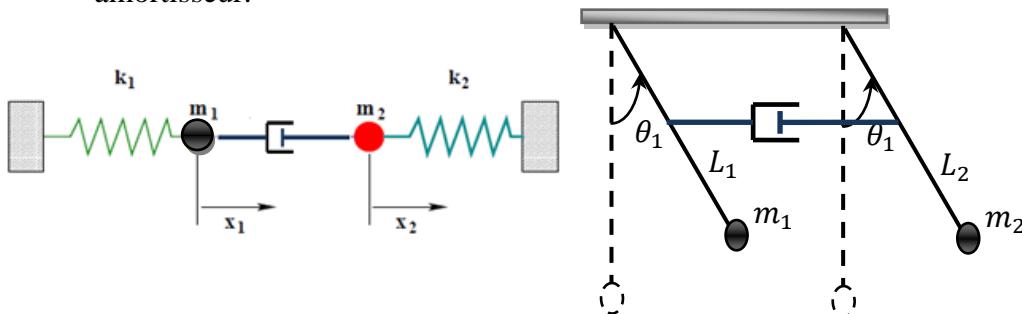


Les équations différentielles correspondantes sont :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\delta_1 \dot{x}_1 + \omega^2 x_1 = a_1 x_2 \\ \ddot{x}_2 + 2\delta_2 \dot{x}_2 + \omega^2 x_2 = a_2 x_1 \end{cases}$$

Tels que :  $a_1 x_2$  et  $a_2 x_1$  sont les termes de couplage.  $a_1$  et  $a_2$  sont des constantes.

- b) **Couplage Visqueux** : Le couplage dans les systèmes mécaniques est assuré par amortisseur. Dans les systèmes électriques, on trouve les circuits couplés par résistance, équivalents au couplage par amortisseur.

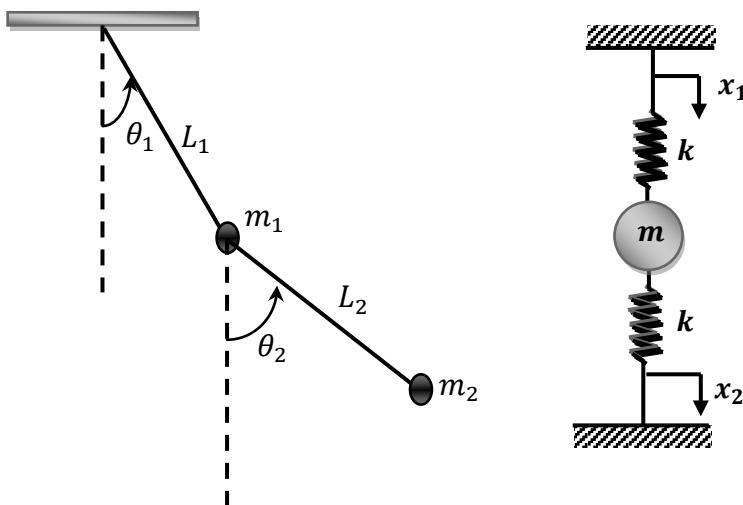


Les équations différentielles correspondantes sont :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\delta_1 \dot{x}_1 + \omega^2 x_1 = b_1 \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 + 2\delta_2 \dot{x}_2 + \omega^2 x_2 = b_2 \dot{x}_1 \end{cases}$$

Tels que :  $b_1 \dot{x}_2$  et  $b_2 \dot{x}_1$  sont les termes de couplage.  $b_1$  et  $b_2$  sont des constantes.

- c) **Couplage Inertiel** : Le couplage dans les systèmes mécaniques est assuré par inertie. Dans les systèmes électriques, on trouve les circuits couplés par inductance, équivalents au couplage par inertie.



Les équations différentielles correspondantes sont :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\delta_1 \dot{x}_1 + \omega^2 x_1 = c_1 \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 + 2\delta_2 \dot{x}_2 + \omega^2 x_2 = c_2 \ddot{x}_1 \end{cases}$$

Tels que :  $c_1 \ddot{x}_2$  et  $c_2 \ddot{x}_1$  sont les termes de couplage.  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes.

#### IV.1 .2 Méthode générale de résolution des équations de mouvement.

Pour un système mécanique, la mise en équation du système couplé passe par la méthode à suivre suivante :

- 1 – On écrit les 2 équations différentielles en fonction des coordonnées généralisées.
- 2 – On fait l'hypothèse que le système admet des solutions harmoniques. Ce qui signifie que le système peut osciller avec la même pulsation pour tous les oscillateurs.
- 3 – La résolution des systèmes d'équations permet d'obtenir 2 pulsations particulières  $\omega_1$  et  $\omega_2$  ; ce sont les pulsations propres.
- 4 - On substitue ensuite  $\omega_1$  dans l'une des 2 équations et l'on obtient le 1<sup>er</sup> mode propre. On substitue ensuite  $\omega_2$  dans l'une des 2 équations et l'on obtient le 2<sup>ème</sup> mode propre.
- 5 – On écrit les 2 solutions générales des équations différentielles du mouvement.

#### IV.1 .3 Exemples de systèmes à 2 DDL

##### IV.1 .3.1 Pendules couplés : (Couplage Elastique)

Considérons deux pendules qui sont couplés par un ressort horizontal de constante de raideur  $k$  à une distance  $a$  de l'axe de rotation.

###### 1. Equations différentielles du mouvement :

###### ❖ Les coordonnées des éléments du système :

La masse  $m_1$  se trouve à une distance  $l_1$  de O.

$$\mathbf{m}_1 \begin{cases} x_{m_1} = l_1 \cdot \sin \theta_1 \\ y_{m_1} = -l_1 \cdot \cos \theta_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{m_1} = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ \dot{y}_{m_1} = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \end{cases} \Rightarrow v^2_{m_1} = l_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

La masse  $m_2$  se trouve à une distance  $l_2$  de O.

$$\mathbf{m}_2 \begin{cases} x_{m_2} = l_2 \cdot \sin \theta_2 \\ y_{m_2} = -l_2 \cdot \cos \theta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{m_2} = l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ \dot{y}_{m_2} = l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{cases} \Rightarrow v^2_{m_2} = l_2^2 \dot{\theta}_2^2$$

$$k = \{a \cdot \sin \theta_1 - a \cdot \sin \theta_2 = a(\sin \theta_1 - \sin \theta_2)\}$$

###### ❖ L'énergie cinétique du système : $T = Tm_1 + Tm_2 = \frac{1}{2}mv_{m_1}^2 + \frac{1}{2}mv_{m_2}^2$

- $Tm_1 = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_{m_1} + \dot{y}_{m_1})^2 = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2(\cos \theta_1^2 + \sin \theta_1^2)$   
 $\Rightarrow Tm_1 = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2$

- $Tm_2 = \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_{m_2} + \dot{y}_{m_2})^2 = \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2(\cos \theta_2^2 + \sin \theta_2^2)$   
 $\Rightarrow Tm_2 = \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}(m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 + m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2)$$

###### ❖ L'énergie potentielle du système : $U = U_k + U_{m_1} + U_{m_2}$

Si on choisit comme origine des énergies potentielles l'axe ( $Ox$ ) on a pour les deux masses :

$U_{m_1} + U_{m_2} = -m_1gl_1 \cdot \cos \theta_1 - m_2gl_2 \cdot \cos \theta_2$  (Le signe moins vient du fait que la masse  $m$  est inférieur à l'axe choisi).

$$U = \frac{1}{2}ka^2(\sin \theta_1 - \sin \theta_2)^2 - m_1gl_1 \cdot \cos \theta_1 - m_2gl_2 \cdot \cos \theta_2$$

- La fonction de Lagrange sera donc :

$$L = T - U = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2}ka^2(\sin \theta_1 - \sin \theta_2)^2 + m_1gl_1 \cdot \cos \theta_1 + m_2gl_2 \cdot \cos \theta_2$$

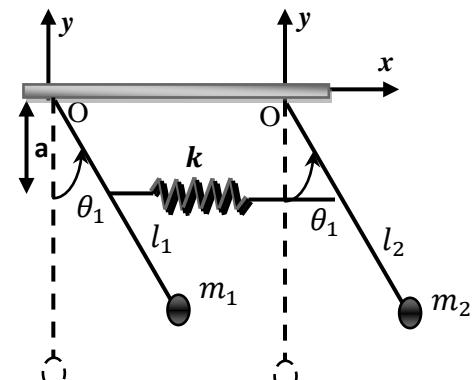
On remarque bien deux coordonnées généralisées qui décrivent le mouvement donc on aura deux équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right) = 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = m_1l_1^2\ddot{\theta}_1 \\ \left( \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right) = -ka^2 \cos \theta_1 (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) - m_1gl_1 \sin \theta_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m_1l_1^2\ddot{\theta}_1 + ka^2 \cos \theta_1 (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) + m_1gl_1 \sin \theta_1 = 0$$

Dans le cas des faibles oscillations, les angles sont très petits on a :  $\begin{cases} \sin \theta \approx \theta \\ \cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \approx 1 \end{cases}$



$$\Rightarrow m_1 l^2 \ddot{\theta}_1 + k a^2 (\theta_1 - \theta_2) + m_1 g l_1 \theta_1 = 0$$

Donc les 02 équations différentielles du mouvement sont :

$$\begin{cases} m_1 l^2 \ddot{\theta}_1 + (k a^2 + m_1 g l_1) \theta_1 = k a^2 \theta_2 \dots \dots \dots (1) \\ m_2 l^2 \ddot{\theta}_2 + (k a^2 + m_2 g l_2) \theta_2 = k a^2 \theta_1 \dots \dots \dots (2) \end{cases}$$

### Remarque

- Le terme de couplage  $k a^2$  est en fonction de  $k$  donc le couplage est élastique.
- Si  $a = 0$  ou  $k = 0 \Rightarrow$  couplage nul : les deux systèmes sont indépendant.
- Les deux équations différentielles possèdent 02 solutions  $\theta_1(t)$  et  $\theta_2(t)$ .

 **2. On fait l'hypothèse que le système admet des solutions harmoniques :**

Donc :  $\theta_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi)$  et  $\theta_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi')$

Tels que :  $A_1, A_2, \varphi$  et  $\varphi'$ ,  $\omega$  est l'une des pulsations propres du système.

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \ddot{\theta}_1 = -\omega^2 \theta_1 \\ \theta_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi') \Rightarrow \ddot{\theta}_2 = -\omega^2 \theta_2 \end{cases}$$

On remplace dans les équations (1) et (2) donc :

$$\begin{cases} (k a^2 + m_1 g l_1 - m_1 l^2 \omega^2) \theta_1 - k a^2 \theta_2 = 0 \dots \dots \dots (3) \\ -k a^2 \theta_1 + (k a^2 + m_2 g l_2 - m_2 l^2 \omega^2) \theta_2 = 0 \dots \dots \dots (4) \end{cases}$$

 **3. Calcul des pulsations propres :** On suppose que  $m_1 = m_2 = m, l_1 = l_2 = l$

$$\begin{pmatrix} k a^2 + m g l - m l^2 \omega^2 & -k a^2 \\ -k a^2 & k a^2 + m g l - m l^2 \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ces deux équations accepteront une solution si le déterminant = 0

$$\begin{vmatrix} k a^2 + m g l - m l^2 \omega^2 & -k a^2 \\ -k a^2 & k a^2 + m g l - m l^2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (k a^2 + m g l - m l^2 \omega^2)^2 - (k a^2)^2 = 0$$

$$(k a^2 + m g l - m l^2 \omega^2)^2 - (k a^2)^2 = 0 \Rightarrow k a^2 + m g l - m l^2 \omega^2 = \begin{cases} +k a^2 \\ -k a^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega^2_1 = \frac{g}{l} + 2 \left( \frac{k}{m} \right) \left( \frac{a}{l} \right)^2 \\ \omega^2_2 = \frac{g}{l} \end{cases} \text{ tels que : } \begin{cases} \omega_1 : \text{la 1ère pulsation propre} \\ \omega_2 : \text{la 2ème pulsation propre} \end{cases}$$

### Remarque

- Si  $a = 0$  ou  $k = 0$ , le couplage est nul  $\Rightarrow \omega^2_1 = \omega^2_2 = \frac{g}{l}$
- Lorsque le système oscille avec une de ses 02 pulsations on dit que le système oscille dans un de ses deux modes.

 **4. Les modes d'oscillations**

Le mode c'est l'état dans lequel les éléments dynamiques du système effectuent une oscillation harmonique avec la même pulsation qui correspond à une de ses deux pulsations.

#### 4.1 Calcul des modes d'oscillations :

Dans chaque mode les deux masses effectuent des mouvements harmoniques simples avec la même pulsation ( $\omega_1$  ou  $\omega_2$ ) et les deux pendules passent par la position d'équilibre au même instant.

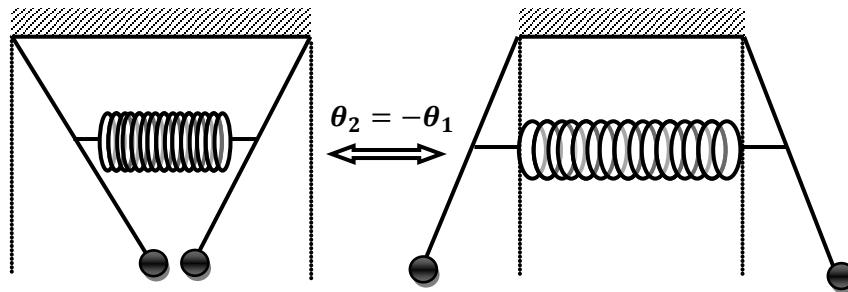
**Premier mode :** on remplace dans (3) ou (4) par  $\omega^2_1 = \frac{g}{l} + 2 \left( \frac{k}{m} \right) \left( \frac{a}{l} \right)^2$  :

On obtient après calcul :  $\theta_2 = -\theta_1$

### Remarque :

- Dans le premier mode les deux pendules ont la même pulsation  $\omega_1$ , la même amplitude et un déphasage  $\pi$ .

- Les deux pendules ont des mouvements opposés.
- Elongation et compression du ressort chaque période sauf au point du milieu du ressort.



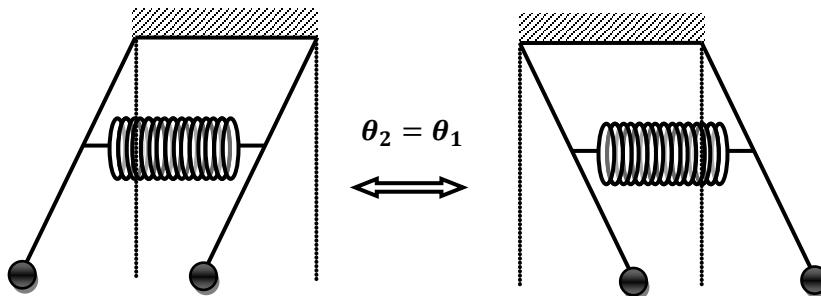
### Deuxième mode :

on remplace dans (3) ou (4) par  $\omega^2_2 = \frac{g}{l}$ :

On obtient après calcul :  $\theta_2 = \theta_1$

**Remarque :**

- Les deux pendules se déplacent dans le même sens.
- Le ressort ne subit aucune variation de sa longueur.



### 5. Calcul des solutions des équations différentielles :

Chacune des mouvements  $\theta_1$  et  $\theta_2$  possède deux composantes harmoniques de pulsations  $\omega_1$  ou  $\omega_2$ . Comme les équations différentielles sont linéaires, toute combinaison de solutions reste solution du système.

La solution générale s'écrit alors comme une combinaison linéaire des deux solutions.

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B_1 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta_2(t) = A_2 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Dans le premier mode :  $\omega = \omega_1 \Rightarrow \theta_2 = -\theta_1 \Rightarrow A_1 = -A_2 \Rightarrow \vec{V}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{V}_1$  est le 1<sup>er</sup> vecteur propre

Dans le deuxième mode :  $\omega = \omega_2 \Rightarrow \theta_2 = \theta_1 \Rightarrow B_1 = B_2 \Rightarrow \vec{V}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{V}_2$  est le 2<sup>ème</sup> vecteur propre

Donc :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta_2(t) = -A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

### 6. Calcul des constantes A, B, phi\_1 et phi\_2

Supposons que :

$$\begin{cases} \theta_1(0) = \theta_0, \dot{\theta}_1(0) = 0 \\ \theta_2(0) = 0, \dot{\theta}_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1(t) = A\omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B\omega_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \dot{\theta}_2(t) = -A\omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B\omega_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_1(0) = A \sin(\varphi_1) + B \sin(\varphi_2) = \theta_0 \\ \theta_2(0) = -A \sin(\varphi_1) + B \sin(\varphi_2) = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \dot{\theta}_1(0) = A\omega_1 \cos(\varphi_1) + B\omega_2 \cos(\varphi_2) \\ \dot{\theta}_2(0) = -A\omega_1 \cos(\varphi_1) + B\omega_2 \cos(\varphi_2) \end{cases}$$

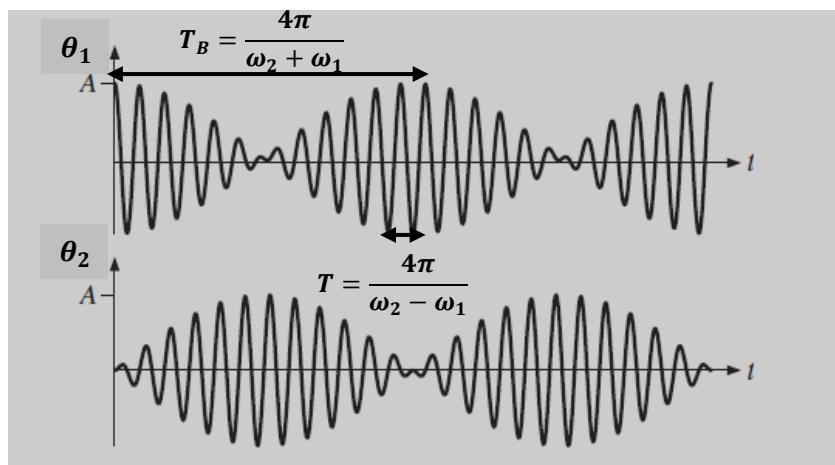
$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 = \pm \frac{\pi}{2} \\ A = B = \frac{\theta_0}{2} \end{cases}$$

Donc :  $\begin{cases} \theta_1(t) = \frac{\theta_0}{2} \left[ \sin\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{2}\right) \right] \\ \theta_2(t) = \frac{\theta_0}{2} \left[ -\sin\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{2}\right) \right] \end{cases}$

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \theta_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) + \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right) \\ \theta_2(t) = -\theta_0 \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) + \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right) \end{cases}$$

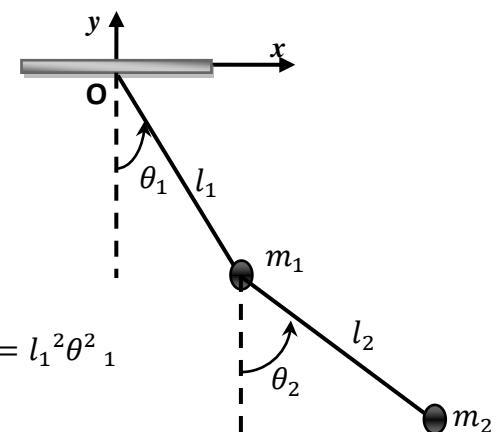
### 7. Phénomène de battement :

Lorsque le couplage est faible ( $k$  faible), les pulsations propres des 2 oscillateurs ( $\omega_1$  et  $\omega_2$ ) sont voisines ( $\omega_1 \approx \omega_2 \Rightarrow \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  est faible), il se produit un phénomène de battement. Les 2 oscillateurs se transmettent de l'énergie entre eux et vibrent avec une pulsation  $\omega$  égal à la moyenne des deux pulsations propres  $\omega = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)$  avec une période égale à  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi}{\omega_2 + \omega_1}$ . Tandis que la pulsation du battement est égale à  $\omega_B = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)$ , avec une période  $T_B = \frac{4\pi}{\omega_2 - \omega_1}$ .



### IV.1 .3.2 Pendules couplés : (Couplage inertiel)

Considérons deux pendules qui sont couplés par une masse  $m_1$  qui se trouve à une distance  $l_1$  de l'axe de rotation.



### 1. Equations différentielles du mouvement :

#### ❖ Les coordonnées des éléments du système :

La masse  $m_1$  se trouve à une distance  $l_1$  de O.

$$m_1 \begin{cases} x_{m_1} = l_1 \cdot \sin \theta_1 \\ y_{m_1} = -l_1 \cdot \cos \theta_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{m_1} = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ \dot{y}_{m_1} = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \end{cases} \Rightarrow v^2_{m_1} = l_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

La masse  $m_2$  se trouve à une distance  $(l_1 + l_2)$  de O.

$$m_2 \begin{cases} x_{m_2} = l_1 \cdot \sin \theta_1 + l_2 \cdot \sin \theta_2 \\ y_{m_2} = -l_1 \cdot \cos \theta_1 - l_2 \cdot \cos \theta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{m_2} = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ \dot{y}_{m_2} = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{cases}$$

Calcul de  $v_{m_2}$

$$v^2_{m_2} = (l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 + (l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2$$

$$v^2_{m_2} = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \cdot l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + 2l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \cdot l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2$$

$$v^2_{m_2} = l^2_1 \dot{\theta}_1^2 + l^2_2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 \dot{\theta}_1 l_2 \dot{\theta}_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2)$$

$$\text{Or : } \cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \Rightarrow v^2 m_2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 \dot{\theta}_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Dans le cas des faibles oscillations, les angles sont très petits on a :  $\{\cos(\theta_1 - \theta_2) \approx 1$

$$\text{Donc : } v^2_{m_2} = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 = (l_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2)^2$$

- ❖ L'énergie cinétique du système :  $T = Tm_1 + Tm_2 = \frac{1}{2}mv_{m_1}^2 + \frac{1}{2}mv_{m_2}^2$

- $T\mathbf{m}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{m}_1(\dot{x}_{m_1} + \dot{y}_{m_1})^2 = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2(\cos\theta_1^2 + \sin\theta_1^2)$   
 $\Rightarrow T\mathbf{m}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{m}_1l_1^2\dot{\theta}_1^2$

$$\begin{aligned} \bullet \quad T\mathbf{m}_2 &= \frac{1}{2}\mathbf{m}_2\mathbf{v}^2_{m_2} = \frac{1}{2}m_2(l_1\dot{\theta}_1 + l_2\dot{\theta}_2)^2 \\ &\Rightarrow T = \frac{1}{2}\mathbf{m}_1\mathbf{l}^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\mathbf{m}_2(l_1\dot{\theta}_1 + l_2\dot{\theta}_2)^2 \end{aligned}$$

❖ L'énergie potentielle du système :  $U = U_{m_1} + U_{m_2}$

Si on choisit comme origine des énergies potentielles l'axe (***ox***) on a pour les deux masses :

$$U_{m_1} + U_{m_2} = -m_1 g l_1 \cdot \cos \theta_1 - m_2 g (l_1 \cdot \cos \theta_1 + l_2 \cdot \cos \theta_2)$$

(Le signe moins vient du fait que la masse  $m$  est inférieure à l'axe choisi).

$$U = -gl_1(m_1 + m_2) \cos \theta_1 - m_2 gl_2 \cdot \cos \theta_2$$

- La fonction de Lagrange sera donc :

$$L = T - U = \frac{1}{2}m_1l^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(l_1\dot{\theta}_1 + l_2\dot{\theta}_2)^2 + gl_1(m_1 + m_2)\cos\theta_1 + m_2gl_2\cos\theta_2$$

On remarque bien deux coordonnées généralisées qui décrivent le mouvement donc on aura deux équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right) = 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = m_1 l^2 {}_1\ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 (l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 \ddot{\theta}_2) \\ \left( \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right) = -g l_1 (m_1 + m_2) \sin \theta_1 \end{cases} \Rightarrow m_1 l^2 {}_1\ddot{\theta}_1 + m_2 l^2 {}_1\ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 + g l_1 (m_1 + m_2) \theta_1 = 0$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + g l_1 (m_1 + m_2) \theta_1 = -m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2$$

On divise sur  $(m_1+m_2)l_1$  et on trouve :  $l_1\ddot{\theta}_1 + g\theta_1 = -\frac{m_2l_2}{(m_1+m_2)l_1}\ddot{\theta}_2$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m_2 l_2 (l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 \ddot{\theta}_2) \\ \left( \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right) = -m_2 g l_2 \cdot \sin \theta_2 \end{cases} \Rightarrow m_2 l_2 (l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 \ddot{\theta}_2) + m_2 g l_2 \cdot \theta_2 = 0$$

$$\Rightarrow m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 g l_2 \cdot \theta_2 = -m_2 l_2 l_1 \ddot{\theta}_1$$

On divise sur  $m_2 l_2$  et on trouve :  $l_2 \ddot{\theta}_2 + g\theta_2 = -l_1 \ddot{\theta}_1$

Donc les 02 équations différentielles du mouvement sont :  $\begin{cases} l_1\ddot{\theta}_1 + g\theta_1 = -\frac{m_2l_2}{(m_1+m_2)l_1}\ddot{\theta}_2 & \dots \dots \dots (1) \\ l_2\ddot{\theta}_2 + g\theta_2 = -l_1\ddot{\theta}_1 & \dots \dots \dots \dots \dots \dots (2) \end{cases}$

## 2. On fait l'hypothèse que le système admet des solutions harmoniques :

Donc :  $\theta_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi)$  et  $\theta_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi')$

Tels que :  $A_1, A_2, \varphi$  et  $\varphi'$ ,  $\omega$  est l'une des pulsations propres du système.

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \ddot{\theta}_1 = -\omega^2 \theta_1 \\ \theta_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi') \Rightarrow \ddot{\theta}_2 = -\omega^2 \theta_2 \end{cases}$$

On remplace dans les équations (1) et (2) donc :

$$(g - l_1 \omega^2) \theta_1 - \frac{m_2 l_2}{(m_1 + m_2) l_1} \omega^2 \theta_2 = 0 \dots \dots \dots (3)$$

$$(g - l_2 \omega^2) \theta_2 - l_1 \omega^2 \theta_1 = 0 \dots \dots \dots \dots \dots (4)$$

**3. Calcul des pulsations propres :** On suppose que  $m_1 = m_2 = m$ ,  $l_1 = l_2 = l$

$$(g - l \omega^2) \theta_1 - \frac{l}{2} \omega^2 \theta_2 = 0 \dots \dots \dots (4)$$

$$(g - l \omega^2) \theta_2 - l \omega^2 \theta_1 = 0 \dots \dots \dots \dots \dots (5)$$

$$\begin{pmatrix} g - l \omega^2 & -\frac{l \omega^2}{2} \\ -l \omega^2 & g - l \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ces deux équations accepteront une solution si le déterminant = 0

$$\begin{vmatrix} g - l \omega^2 & -\frac{l \omega^2}{2} \\ -l \omega^2 & g - l \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (g - l \omega^2)^2 - \frac{1}{2} (l \omega^2)^2 = 0 ; \text{ C'est l'équation aux valeurs propres.}$$

$\omega_i$  valeurs propres.

$$(g - l \omega^2)^2 - \frac{1}{2} (l \omega^2)^2 = 0 \Rightarrow g - l \omega^2 = \begin{cases} +\frac{1}{\sqrt{2}} l \omega^2 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} l \omega^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = \frac{g}{l(1+\frac{1}{\sqrt{2}})} \\ \omega_2^2 = \frac{g}{l(1-\frac{1}{\sqrt{2}})} \end{cases}$$

Ce sont les valeurs propres.

**3. Calcul des modes d'oscillations ou les vecteurs propres :**

**Premier mode :** on remplace dans (5) ou (6) par  $\omega^2_1 = \frac{g}{l(1+\frac{1}{\sqrt{2}})}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = \frac{t(\frac{g}{l(1+\frac{1}{\sqrt{2}})})}{l(1+\frac{1}{\sqrt{2}})} \\ (\cancel{g} - \cancel{t}(\frac{g}{l(1+\frac{1}{\sqrt{2}})}) \theta_1 - \frac{\cancel{t}(\frac{g}{l(1+\frac{1}{\sqrt{2}})})}{2} \theta_2 = 0 \end{array} \right.$$

$$(1 - \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}) \theta_1 = \frac{1}{2(1+\frac{1}{\sqrt{2}})} \theta_2 \Rightarrow \theta_2 = \sqrt{2} \theta_1 : \text{ c'est le premier mode}$$

**Deuxième mode :** on remplace dans (5) ou (6) par  $\omega^2_2 = \frac{g}{l(1-\frac{1}{\sqrt{2}})}$

On trouve :  $\theta_2 = -\sqrt{2} \theta_1$ : c'est le deuxième mode.

**4. Calcul des solutions des équations différentielles :**

Chacune des mouvements  $\theta_1$  et  $\theta_2$  possède deux composantes harmoniques de pulsations  $\omega_1$  ou  $\omega_2$ . Comme les équations différentielles sont linéaires, toute combinaison de solutions reste solution du système.

La solution générale s'écrit alors comme une combinaison linéaire des deux solutions.

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A \sqrt{2} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B \sqrt{2} \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta_2(t) = A \sqrt{2} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - B \sqrt{2} \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

#### **IV.1 .4 Généralisation aux systèmes à n degrés de liberté : Principe des opérateurs**

#### IV.1.4.1 Energie cinétique généralisée (Opérateur associé à l'énergie cinétique)

Un système à  $n$  degrés de liberté possède  $n$  variables :  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ .

L'énergie cinétique généralisée ;  $T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \dots + \frac{1}{2}m_n\dot{x}_n^2$

Soit le vecteur vertical (colonne) :  $|x\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  KET

Soit le vecteur horizontal (ligne) :  $\langle x | = (x_1, x_2, \dots x_n)$  BRAS

$$\langle x|x \rangle = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \Leftrightarrow \langle \dot{x}|\dot{x} \rangle = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2}m\langle \dot{x}|\dot{x} \rangle$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dots, \dot{x}_n) \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} \Rightarrow T = \frac{1}{2}\langle \dot{x}|T|\dot{x} \rangle$$

**$\mathcal{T}$**  : Matrice carrée (nxn), Opérateur associé à T. Les éléments de  $\tau$  sont déduits des dérivées  $\frac{\partial T}{\partial x_i}$

#### IV.1 .4.2 Energie potentielle généralisée (Opérateur associé à l'énergie potentielle)

$$T = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 + \dots + \frac{1}{2}k_nx_n^2.$$

$$U = \frac{1}{2}k\langle x|x\rangle \Rightarrow U = \frac{1}{2}\langle x|U|x\rangle. \text{ Tel que : } U = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$$

**$\mathcal{U}$**  : Matrice carrée ( $n \times n$ ), Opérateur associé à  $\mathbf{U}$ . Les éléments de  **$\mathcal{U}$**  sont déduits des dérivées  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}$ .

#### IV.1 .4.3 *Equation différentielle*

Le Lagrangien (la fonction de Lagrange) :  $L = T - U = \frac{1}{2} \langle \dot{x} | \mathcal{T} | \dot{x} \rangle - \frac{1}{2} \langle x | \mathcal{U} | x \rangle$

$$\text{Equation de Lagrange : } \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} \right) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \langle \dot{x} | \mathcal{T} | \dot{x} \rangle \\ \frac{\partial L}{\partial x_i} = - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \langle x | \mathcal{U} | x \rangle \end{cases}$$

On a :  $\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \langle \dot{x} | \mathcal{T} | \dot{x} \rangle = 2 \langle I_i | \mathcal{T} | \dot{x} \rangle$  et  $\frac{\partial}{\partial x_i} \langle x | \mathcal{U} | x \rangle = 2 \langle I_i | \mathcal{U} | x \rangle$  avec  $I_i$  vecteur unité.

$$\langle I_1 \rangle = (1,0,0,0, \dots, 0), \langle I_2 \rangle = (0,1,0,0, \dots, 0), \dots, \dots, \dots, \dots, \langle I_n \rangle = (0,0,0,0, \dots, 1).$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \langle I_i | \mathcal{T} | \dot{x} \rangle \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = \langle I_i | \mathcal{T} | \ddot{x} \rangle$$

$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\langle I_i | \mathcal{U} | x \rangle \Rightarrow \langle I_i | \mathcal{T} | \ddot{x} \rangle + \langle I_i | \mathcal{U} | x \rangle = \mathbf{0}$ , c'est l'équation de Lagrange.

$$\Rightarrow \mathcal{T} | \ddot{x} \rangle + \mathcal{U} | x \rangle = \mathbf{0} \Rightarrow | \ddot{x} \rangle + \mathcal{T}^{-1} | x \rangle = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} | x \rangle + \mathcal{L} | x \rangle = \mathbf{0}$$

$\mathcal{L} = \mathcal{T}^{-1} \cdot \mathcal{U}$  : Opérateur associé au Lagrangien L,  $\mathcal{T}^{-1}$  : Matrice inverse de  $\mathcal{T}$ .

#### IV.1 .4.4 Equation aux valeurs propres :

La solution de l'équation  $\frac{d^2}{dt^2} | x \rangle + \mathcal{L} | x \rangle = \mathbf{0}$  peut être sous la forme complexe :  $C e^{j\omega t}$

$$\frac{d^2 | x \rangle}{dt^2} = -\omega^2 | x \rangle \Rightarrow -\omega^2 | x \rangle + \mathcal{L} | x \rangle = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathcal{L} - \omega^2) | x \rangle = \mathbf{0} ,$$

$(\mathcal{L} - \omega^2) | x \rangle = \mathbf{0} \Rightarrow \text{Det} [\mathcal{L} - \omega^2 I] = \mathbf{0}$ , c'est l'équation aux valeurs propres.  $\omega_i$  : valeurs propres.

❖ valeurs propres :

$$\text{Exemple : } \mathcal{L} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix},$$

$$\text{L'équation aux valeurs propres : } \mathcal{L} - \omega^2 I = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} - \omega^2 & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} - \omega^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} L_{11} - \omega^2 & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (L_{11} - \omega^2)(L_{22} - \omega^2) - L_{12} \cdot L_{21} = 0$$

A chaque valeur propre  $\omega_i$  correspond un vecteur propre  $\vec{V}_i$ ,  $\omega_1 \mapsto \vec{V}_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix}$ ,  $\omega_2 \mapsto \vec{V}_2 \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}$

❖ Pour :  $\omega = \omega_1$  :  $(\mathcal{L} - \omega_1^2) \vec{V}_1 = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} L_{11} - \omega_1^2 & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} - \omega_1^2 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (L_{11} - \omega_1^2)x_{11} + L_{12}x_{12} = 0 \\ L_{21}x_{11} - (L_{22} - \omega_1^2)x_{12} = 0 \end{cases} \Rightarrow x_{11} \text{ et } x_{12}?$$

❖ Pour :  $\omega = \omega_2$  :  $(\mathcal{L} - \omega_2^2) \vec{V}_2 = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} L_{11} - \omega_2^2 & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} - \omega_2^2 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow x_{21} \text{ et } x_{22}?$$

#### IV.1 .4.5 Solution des équations différentielles :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A \vec{V}_1 e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} + B \vec{V}_2 e^{j(\omega_2 t + \varphi_2)} = A \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} + B \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} e^{j(\omega_2 t + \varphi_2)}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = Ax_{11}e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} + Bx_{21}e^{j(\omega_2 t + \varphi_2)} \\ x_2(t) = Ax_{12}e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} + Bx_{22}e^{j(\omega_2 t + \varphi_2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = Ax_{11}e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} + Bx_{21}e^{j(\omega_2 t + \varphi_2)} \\ x_2(t) = Ax_{12}e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} + Bx_{22}e^{j(\omega_2 t + \varphi_2)} \end{cases}$$